Práctica 6 - Formas cuadráticas

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Considere las siguientes funciones definidas para los vectores $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$:

a) $A(x, y) = 1$.

b) $A(x, y) = (\eta_1 - \xi_1)^2 + \eta_2\xi_2$

c) $A(x, y) = (\eta_1 + \xi_1)^2 - (\eta_2 - \xi_1)^2\xi_2$

d) $A(x, y) = (\eta_1\xi_1) - \eta_2\xi_2$

Determine cuáles de estas funciones corresponden a formas bilineales de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para aquellas que lo sean, determine la matriz que representa la forma cuadrática en la base canónica del espacio. Indique además si dichas formas bilineales son simétricas.

Ej. 2 — Verificar si las siguientes aplicaciones $A : \mathbb{P}_n[\mathbb{R}] \times \mathbb{P}_n[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ son formas bilineales:

a) $A(p, q) = p(1) + q(1)$

b) $A(p, q) = p(1)q(1)$

c) $A(p, q) = p(1)q'(1)$

d) $A(p, q) = \int_a^b \int_a^b p(t)K(s, t)q(s)ds\, dt$ con $K(s, t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en $D := \{(x, y) : a < x, y < b\}$

e) $A(p, q) = \int_0^1 \int_0^1 p(t)q(s)dsdt$

Ej. 3 — Sea la forma bilineal $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $A((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) = 2\eta_1\xi_1 - 3\eta_1\xi_2 + \eta_2\xi_2$.

a) Encuentre su matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

b) Encuentre su matriz asociada en la base $\mathcal{B}' = \{(2, 1), (1, -1)\}$

c) Encuentre la matriz de cambio de base $P = [\ \mathbf{1}\ ]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ y verifique que $\mathbf{A}_{\mathcal{B}'} = P^{\mathrm{t}}\mathbf{A}_{\mathcal{B}}P$

d) Rescriba la forma bilineal como una suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica. Encuentre las matrices asociadas con cada una de esas partes en la base $\mathcal{B}$.

Ej. 4 — En $\mathbb{R}^{2\times2}$ se define $f(A, B) = \mathrm{tr}(A.M.B)$, donde $M = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{smallmatrix}\right)$. Muestre que f es una forma bilineal y construya su matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times2}$.

Ej. 5 — Muestre que $f(A, B) = n\mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}B) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ define una forma bilineal en $\mathbb{R}^{n\times n}$. ¿Es simétrica? ¿Es singular? (Sugerencia: aplíquela a la matriz identidad y a otra matriz arbitraria). Muestre que, en cambio, su restricción al subespacio de matrices de traza nula es no singular .

Ej. 6 — Considere los conjuntos $\mathcal{C}_{A,b,c} = \{x \in \mathbb{R}^2 / x^t \cdot A \cdot x + b^t \cdot x = c\}$ donde $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^2$ y $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$. Determine una parametrización de los puntos contenidos en $\mathcal{C}_{A,c}$ para los siguientes $\mathcal{C}_{A,b,c}$ y grafique en el plano:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, b = (1, 1)^t, c = 2$ 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, b = (1, -1)^t, c = 1$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = (1, -1), c = 1$ 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = (1, 1), c = 1$

Tip: Lleve la forma cuadrática $x^t \cdot A \cdot x$ a su forma canónica.

Ej. 7 — Dada la forma bilineal simétrica cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\omega(x) = x^t A x$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

encuentre su forma canónica por medio de la técnica de completar cuadrados y mediante diagonalización. Compare los resultados. Luego encuentre una base $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ en la que $y_i^t A y_i$ tenga elementos diagonales ± 1. ¿Es única esta elección de base?

Ej. 8 — Exponenciales gaussianas. Partiendo de la identidad $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi}$ muestre que si A es la matriz asociada a una forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida positiva,

a)$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega(x,x)/2) d^d x = (\det A)^{-1/2}$

b)$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j \exp(-\omega(x,x)/2) d^d x}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega(x,x)/2) d^d x} = (A^{-1})_{ij}$

c)Si $v \in \mathbb{R}^d$, $\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega(x,x)/2 - v \cdot x) d^d x}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega(x,x)/2) d^d x} = \exp(\frac{1}{2} v^t \cdot A^{-1} \cdot v)$

d)$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega_1(x-z, x-z)/2) \exp(-\omega_2(z-y, z-y)/2) d^d z = \frac{(2\pi)^d}{\sqrt{\det(A_1 + A_2)}} \exp(-\frac{1}{2}\omega_{12}(x-y, x-y))$ con A_1 y A_2 las matrices asociadas a las formas cuadráticas ω_1 y ω_2 respectivamente, y $\omega_{12}(u,u)$ una forma cuadrática cuya matriz asociada es $A_2.(A_2^{-1} - (A_1 + A_2)^{-1}).A_2$. Notar que de esto se desprende la identidad no trivial $A_2.(A_2^{-1} - (A_1 + A_2)^{-1}).A_2 = A_1.(A_1^{-1} - (A_1 + A_2)^{-1}).A_1$