Práctica 5 - Forma de Jordan / Teorema de Cayley - Hamilton

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Dada la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

con $A = S_A \tilde{A} S_A^{-1}$ y $B = S_B \tilde{B} S_B^{-1}$ matrices diagonalizables,

a)Muestre que el conjunto de los autovalores de M es la unión de los conjuntos de autovalores de A y B.

b)Pruebe que para cada autovector v_A de A existe un autovector $w_{AB} = \binom{v_A}{[0]}^t$ de M, asociado al mismo autovalor.

c)asumiendo que v_B es un autovector de B con autovalor λ, y que A no tiene a λ entre sus autovectores, construya un autovector de M con autovalor λ en términos de A, C, λ y v_B. ¿Qué ocurriría si λ fuese autovalor de A?

Ej. 2 — Encuentre los autovectores y autovalores de las siguientes matrices en función del parámetro ϵ

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \epsilon \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ej. 3 — Encuentre la forma de Jordan de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ej. 4 — Encuentre el polinomio característico y el polinomio mínimo de las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ej. 5 — Para la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ verifique el teorema de Cayley-Hamilton. Luego calcule A^2, A^3 y A^{-1}.

Ej. 6 — Considere el operador $F : \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \to \mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ que actua como $F[p(x)] = \frac{\partial}{\partial x}(x\, p(x))$.

a)Halle su representación matricial en la base canónica ($B = \{1, x, x^2, x^3\}$).

b)Calcule su polinomio característico

c)Determine sus correspondientes autovalores y autovectores, indicando una base para cada subespacio.

d)Repita los calculos para el operador ∂_x.

Ej. 7 — Sea $\mathbf{A}$ un operador nilpotente de grado q, que actua sobre los vectores de un espacio vectorial de dimensión n.

1.Muestre que existe un $x_0 \neq 0$ tal que $\{x_0, \mathbf{A}x_0, \dots, \mathbf{A}^{q-1}x_0\}$ forman un conjunto de vectores linealmente independientes. Como corolario, $q \leq n$.

2.A partir del resultado anterior, muestre que por ejemplo, no puede definirse la raíz cuadrada de una matriz nilpotente de orden n (ej: $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$).

3.Suponiendo que $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ es una matriz diagonalizable, encuentre todas las posibles raíces cuadradas en términos de sus autovectores y autovalores.

4.Considere ahora la familia $B(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. Encuentre $B^{1/2}(\lambda)$. ¿Qué pasa en el límite $\lambda \to 0$?

Ej. 8 — Usando el teorema de Jordan, pruebe que

a)$\ln(\det(A)) = \mathrm{tr}(\ln(A))$

b)$\det\exp(A) \neq 0$

c)$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$

Ej. 9 — Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales para la condición inicial $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{dt} = 5x(t) - y(t) \\ \frac{\partial y}{dt} = x(t) + 3y(t) \end{cases}$$