

Práctica 4 - Transformaciones, operadores lineales y problema de autovalores

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n \times n}$ ¿cuáles de los siguientes operadores son lineales?

a) $\hat{G}(A) = MA$

b) $\hat{G}(A) = [M, A] = M.A - A.M$ con $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

c) $\hat{G}(A) = M + A$

siendo $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ej. 2 — Considere los siguientes operadores sobre \mathbb{R}^3

$$\mathbf{F}(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, 0, 0) \quad \mathbf{G}(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \gamma) \quad \mathbf{H}(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}, 0\right) \quad (1)$$

a) Verifique que son operadores lineales y describir su efecto geométrico de los mismos.

b) Muestre que $\mathbf{FG} = \mathbf{0}$, el operador nulo.

c) Demuestre que cada uno de estos operadores es idempotente (\mathbf{P} es idempotente $\Leftrightarrow \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$).

d) Construya las correspondientes matrices de representación en la base canónica de \mathbb{R}^3 y verificar los resultados en c)

e) Determine el núcleo y la imagen de estos operadores, así como sus dimensiones.

Ej. 3 — Operadores de proyección: Sea $\mathbf{P} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ un operador idempotente ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$) sobre \mathbb{V} . Demuestre que:

a) Si $u \in I(\mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{P}(u) = u$

b) Si $\mathbf{P} \neq \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{P}$ no es sobreyectiva.

c) $\mathbf{1} - \mathbf{P}$ también es un operador de proyección.

d) El espacio vectorial sobre el que actúa \mathbf{P} puede escribirse como $I(\mathbf{P}) \oplus N(\mathbf{P})$

e) Para cada descomposición de \mathbb{V} como suma directa $\mathbb{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ existe un operador proyección $\mathbf{P}_{\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2}$ de manera que si $x = m + n \in \mathbb{V}$ con $m (n) \in \mathcal{V}_1 (\mathcal{V}_2)$, $\mathbf{P}_{\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2}(x) = m$.

f) Muestre que $\frac{1 + \sum_{\mu} v_{\mu} \sigma_{\mu}}{2}$ - siendo σ_{μ} las matrices de Pauli y v_{μ} las componentes de un vector unitario de \mathbb{R}^3 - son operadores de proyección.

Ej. 4 — Calcule la matriz $\exp(A)$ siendo $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ tal que $\forall_{ij} A_{ij} = 1$ (una matriz de 6×6 con todas sus entradas iguales a 1)

Ej. 5 — Rotaciones planas:

a) Calcule los autovalores de $R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, y muestre que $R_{\theta} = \exp(-i\theta\sigma_y)$ ($\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$)

b) (Opcional para los alumnos de segundo año) A partir del resultado anterior, muestre que las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q(t) = p(t) \\ \frac{d}{dt} p(t) = -q(t) \end{cases}$$

describen trayectorias circulares en el plano (x, p)

Ej. 6 — Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Determine los autovectores y autovalores de A , B , C y D .
- Evalue los autovalores y autovectores de $\alpha A + \beta I$
- Evalue los autovalores de A^2 y A^8 .
- Evalue los autovalores de $\exp(A)$, $\exp(B)$ y $\exp(D)$

Ej. 7 — Ecuaciones de recurrencia: Si $x_1 = 1$ ($x_0 = 0$), encuentre el término general para la ecuación de recurrencia $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}/2$ y para $x_{n+1} = x_n/2 - x_{n-1}/2$.

Ej. 8 — Exprese los autovalores de una matriz general en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ en función de su traza y su determinante. ¿Qué se puede decir de sus autovectores?

Ejercicios adicionales (opcionales)

Ej. 9 — Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz antisimétrica genérica. Determine sus autovalores y sus autovectores. Tip: Después de haberlo hecho siguiendo el método general (calcular el polinomio característico, encontrar los autovalores y luego encontrar los núcleos de $A - \lambda_i$), observe que pueden obtenerse de saber que 1) $\text{Tr} A = 0$, 2) $\det A = 0$ y 3) $\text{Tr} A \cdot A = -2((A_{12})^2 + (A_{13})^2 + (A_{23})^2)$.

Ej. 10 — Demuestre que si $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de permutación (una matriz formada por filas independientes, cada una de ellas con un único elemento no nulo igual a 1), sus autovalores (en general complejos) tienen que ser raíces enésimas de la unidad.

Ej. 11 — Considere una matriz diagonalizable $A = S D S^{-1}$, con $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Suponiendo que $\lambda_{i+1} - \lambda_i > \epsilon$, evalue (a primer orden) el cambio en los autovalores de A al incrementar el elemento A_{ij} en una cantidad δ . Tip: En la base que diagonaliza A , desarrollar el polinomio característico como una serie de potencias en δ , truncar el desarrollo a primer orden y resolver la ecuación secular “perturbada”. ¿Por qué es importante la hipótesis de que $\epsilon > 0$?

Ej. 12 — Matrices cíclicas. Considere una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A_{i,j} = f(i-j)$ con $f(i+n) = f(i)$ (cada fila es igual a la fila anterior desplazada cíclicamente una posición a la derecha). Muestre que la matriz es diagonal en la base definida en el Ej. 15 de la práctica 3, y que los autovalores vienen dados por $\lambda_k = \sum_{m=1}^n f(m) \exp(-ikm/n)$ (esto es, los autovalores son la “transformada de Fourier discreta” de la última fila).

Ej. 13 — Derivaciones

- Demuestre que el operador “derivada” $\partial_x : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ ($\mathcal{C}^\infty = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ es derivable a todo orden en cada punto}\}$) que actúa de forma que $(\partial_x f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ es un operador lineal. Determine su núcleo y su imagen. Observe que el operador es un endomorfismo sobre el subespacio de \mathcal{C}^∞ generado por la base $B = \{\cos(\omega x), \sin(\omega x)\}$. Encuentre la representación matricial de la acción de este operador en dicho subespacio respecto de la base B .
- Considere el operador lineal \mathbf{X} definido sobre \mathcal{C}^∞ , que actúa como $(\mathbf{X}f)(x) = x(f(x))$. Determine si existe algún subespacio propio de dimensión finita en \mathcal{C}^∞ sobre el que \mathbf{X} actúe como endomorfismo.
- Muestre que $[\partial_x, \mathbf{X}] = \mathbf{1}$. Observe que no existen pares de operadores en un espacio de dimensión finita tales que su conmutador sea el operador $\mathbf{1}$.
- Muestre que $(\partial_x \mathbf{X})^2 = \partial_x^2 \mathbf{X}^2 - \partial_x \mathbf{X}$

Ej. 14 — Considere ahora el espacio generado por las primeras n “funciones de Hermite” $\mathcal{F}_n = \overline{\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}\}}$ con $\psi_k(x) = H_k(x) \exp(-x^2/2) / \sqrt{\pi^{1/2} 2^k k!}$, donde $H_k(x)$ el k -ésimo polinomio de Hermite (definidos en la práctica anterior). Sea además $\mathbf{X}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{X} \mathbf{P}_n$, ($\mathbf{D}_n = \mathbf{P}_n \partial_x \mathbf{P}_n$) el operador \mathbf{X} (∂_x) “restringido” a \mathcal{F}_n (siendo \mathbf{P}_n el operador proyección que actúa sobre las funciones de Hermite como: $\mathbf{P}_n(\psi_k) = \begin{cases} \psi_k & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$).

- a) Escriba las matrices asociadas a los operadores \mathbf{X}_n y \mathbf{D}_n en la base de las funciones de Hermite para $n = 2, 3$ y 4 (nótese que ∂_x sobre los *polinomios* de Hermite es un endomorfismo, pero no así sobre \mathcal{F}_k).
- b) Usando las ecuaciones de recurrencia $H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x)$ y $H_{k+1}' = 2xH_k'(x) - H_k''(x)$ (práctica 3) determine la forma general de las matrices \mathbf{X}_n y \mathbf{D}_n .
- c) Calcule $C_k = [X_k, D_k]$ en esa base y evalúe $\text{Tr } C_k$.
- d) ¿En qué sentido se puede decir que $\lim_k \mathcal{F}_k = \mathcal{C}^\infty$? ¿Qué pasa con los límites de $C_{k \rightarrow \infty}$, $\mathbf{P}_{k \rightarrow \infty}$ y $\mathbf{X}_{k \rightarrow \infty}$?