Práctica 3 - Cambios de base y transformaciones lineales (1)

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Muestre que $B = \{(2\mathbf{e_1} - 4\mathbf{e_3});\ (2\mathbf{e_1} - 4\mathbf{e_2});\ (\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3})\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, siendo $\mathbf{e}_i$ los vectores de la base canónica $B^{(o)}$.

a)Reescriba el vector $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - 3\,\mathbf{e}_2$ en esa base.

b)Escriba la matriz cambio de base $[\hat{1}]^{B}_{B^{(o)}}$.

c)Encuentre la matriz de cambio de base $[\hat{1}]^{B}_{B'}$ donde $B' = \{(2\mathbf{e_2} - 4\mathbf{e_1});\ (2\mathbf{e_3} - 4\mathbf{e_1});\ (\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3})\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$.

Ej. 2 — Rotaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

a)En $\mathbb{R}^2$, exprese el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ en una base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, rotada en un ángulo de 30° respecto de la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Escriba la matriz de cambio de base correspondiente.

b)En $\mathbb{R}^3$, exprese el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ en una base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, correspondiente a una base rotada en un ángulo de 45° respecto del eje y la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Escriba la matriz de cambio de base correspondiente.

c)Exprese el operador $\hat{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que rota los vectores alrededor del origen, en un ángulo de π en sentido positivo (antihorario).

d)El operador $\hat{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que refleja los vectores respecto del eje y. Compare con el anterior.

Ej. 3 — Determinar cuáles de los siguientes son tranformaciones lineales. En los casos afirmativos indicar si se trata de endomorfismos, y en tal caso, encontrar la matriz que representa al operador en la correspondiente base canónica. Determinar luego el nucleo e imagen de dichas transformaciones y sus respectivas dimensiones.

a)$\hat{F}(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

b)$\hat{F}(\alpha, \beta) = (\alpha^2, \beta^2)$

c)$\hat{F}(\alpha, \beta) = (e^{\alpha}, e^{\beta})$

d)$\hat{F}(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma; \beta; \beta)$

e)$\hat{F}(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha; \beta; \alpha\,\beta + \gamma)$

f)$\hat{F}(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha^2 + \beta; \beta; 2\gamma + 3)$

En los siguientes casos, asumir que $x \in \mathbb{R}^3$.

g)$\hat{F}(x) = 2\,x - a$, con $a \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo.

h)$\hat{F}(x) = (a \cdot x)a$

i)$\hat{F}(x) = ||x|| = \sqrt{x \cdot x}$

Ej. 4 — Operadores usuales sobre espacios de matrices

a)Sea $F(A) : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ el operador transposición, definido por $F(A) = A^T$. Demostrar que es una transformación lineal y hallar su núcleo y su imágen. Para $m = n = 2$, hallar también la representación matricial de la misma en la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $B = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\ ; \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\ ; \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\ ; \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$

b)Sea $\mathrm{Tr}A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ la forma traza, definida por $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ para $A = (a_{ii})$, $i, j = 1, \ldots n$. Mostra que es una trasformación lineal y hallar su nucleo e imágen, junto con las respectivas dimensiones. Para $n = 2$, hallar también su representación matrical.

c)Sea $\det A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ la forma determinante. Mostrar que no es una forma lineal.

Ej. 5 — Sea $\hat{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador definido por $\hat{F}(\alpha;\beta;\gamma) = (\beta; 3\beta - 2\alpha; \gamma)$.

a)Escriba la matriz que representa a $\hat{F}$ en la base canónica.

b)Determine la matriz que representa a $\hat{F}$ en la base $B = \{(1;1;0)\ ;(1;2;0)\ ;(0;0;1)\}$

c)Verificar que la traza y el determinante de las matrices que representan a $\hat{F}$ en dichas bases permanecen invariantes.

Ej. 6 — Sea la transformación lineal $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\hat{A}(\alpha;\beta;\gamma;\delta) = (\alpha - \beta + \gamma + \delta; \alpha + 2\gamma - \delta; \alpha + \beta + 3\gamma - 3\delta)$$

a)Construya la matriz asociada en la base canónica.

b)Determine una base y la dimensión de la imagen.

c)Determine una base y la dimensión del núcleo.

Ej. 7 — Determinar las bases de los espacios fila y columna de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & -10 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -10 & 12 & 3 \\ -3 & 23 & -26 & -6 \end{pmatrix}$

Ej. 8 — Hallar una inversa a izquierda de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y utilícela para obtener la solución (si existe) de las ecuaciones $A.X = B_1$ y $A.X = B_2$ con $B_1 = (1, 2, -3, 2, 1)^t$ y $B_2 = (1, 2, 3, 2, 1)^t$.

Ej. 9 — Considere la matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$ definida por bloques $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^t \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. En lo que sigue asumiremos que $\det(\mathbf{D}) \neq 0$

a)Muestre que $\mathbf{M} = \mathbf{UL}$ con $\mathbf{U}$ y $\mathbf{L}$ las matrices triangulares por bloques

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{B}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathbf{B}^t\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ (Llamamos a la matriz $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ el *Complemento de Schur* del bloque $\mathbf{D}$).

b)Dé una expresión para el determinante de $\mathbf{M}$ en términos de los determinantes de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{S}$.

c)Dé una expresión para la inversa de $\mathbf{M}$ en términos de sus matrices de bloques.

Ejercicios adicionales (Opcionales)

Ej. 10 — Transformaciones activas vs transformaciones pasivas.

a)Demuestre que si B y B' son dos bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, existe una transformación lineal no singular $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $\forall_{v\in\mathbb{V}}$

$$[v]_B = [F[v]]_{B'}$$

b)Considere el subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ generado por las matrices de Pauli σ_μ, y la transformación lineal $R_\theta : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ definida por $\hat{R}_\theta(H) = U_\theta.H.U_\theta^\dagger$, con $U_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{smallmatrix}\right)$ una matriz unitaria. Muestre que efectivamente $\hat{R}_\theta$ es una transformación lineal. Luego, encuentre $[\hat{R}_\theta]_B^B$ con $B = \{\sigma_1;\ \sigma_2;\ \sigma_3\}$. Finalmente muestre que $B' = \{\hat{R}(\sigma_1);\ \hat{R}(\sigma_2);\ \hat{R}(\sigma_3)\}$ es base $\mathcal{S}$ y calcule $[\hat{1}]_B^{B'}$.

Ej. 11 — De un ejemplo de transformación NO LINEAL que sea no singular ($N(\hat{A}) = 0$), pero que no sea inyectiva.

Ej. 12 — Dada la transformación lineal $\hat{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\hat{G}(\alpha;\beta;\gamma) = (\alpha + 2\beta - 4\gamma; 2\alpha + 3\beta + \gamma)\,,$$

encontrar el conjunto de los vectores $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\hat{G}(x) = (3, 4)$.

Ej. 13 — Expresar en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ las matrices que representan los siguientes operadores

a)El operador $\hat{R}$ que rota los vectores alrededor del eje z en un ángulo θ en sentido positivo (antihorario).

b)El operador $\hat{P}$ que refleja los vectores respecto del plano XY

Ej. 14 — Polinomios de Hermite. Considere el conjunto de polinomios $h_n(x)$ definidos por la recurrencia

$$h_0(x) = 1 \qquad h_{n+1}(x) = 2\,x\,h_n(x) - h_n^{'}(x)$$

de manera que el polinomio $h_n(x)$ es de grado n en x. Muestre que $B_n = \{h_k(x)/0 \leq k \leq n\}$ es base del espacio vectorial de $\mathbb{P}_n[\mathbb{R}]$, los polinomios de grado n en la variable real x. Para $n = 3$, exprese la matriz de cambio de base $[\hat{1}]_{B_n}^{B_n^{(o)}}$ respecto de la base canónica $B_n^{(o)} = \{x^k/0 \leq k \leq n\}$.

Ej. 15 — Transformada de Fourier Discreta. Considere el espacio $\mathbb{C}^n$ y el conjunto de vectores $B' = \{\tilde{\mathbf{e}}_1; \ldots \tilde{\mathbf{e}}_n\}$ con $\tilde{\mathbf{e}}_k = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{e}_m e^{2\pi i\, m\, k/n}$. Muestre que B' es base de $\mathbb{C}^n$ exhibiendo que la matriz cambio de base $[\hat{1}]_B^{B'}$ es no singular. Muestre además que $[\hat{1}]_B^{B'}$ es una matriz unitaria.