

Práctica 2 - Bases y dimension

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Determinar si los conjuntos considerados son base de los respectivos espacios vectoriales. Si no lo son, dar una base de los correspondientes subespacios que generan.

- a) $\{(1; 1; 1); (1; 2; 3); (2; -1; 1)\} \subset \mathbb{R}^3$
 b) $\{(1; 1; 1; 1); (1; 2; 3; 2); (2; 5; 6; 4); (2, 6, 8, 5)\} \subset \mathbb{R}^4$
 c) $\{1 + t; t + t^2; t^2 + t^3; \dots; t^{k-1} + t^k\} \subset \mathbb{P}_k[\mathbb{R}]$
 d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}.$

Ej. 2 — Mostrar que si $W = \{v_1, \dots, v_n\}$ contiene un subconjunto de vectores LD, entonces W es LD.

Ej. 3 — Determine la dimensión de los siguientes espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales y dé en cada caso una posible base:

- a) $\mathbb{R}^{m \times n}$.
 b) $\mathbb{S}_m = \{A / A \in \mathbb{R}^{m \times m}; A^t = A\}$ (matrices reales de $m \times m$ simétricas).
 c) $\mathbb{A}_m = \{A / A \in \mathbb{R}^{m \times m}; A^t = -A\}$ (matrices reales de $m \times m$ antisimétricas).
 d) $\mathbb{H}_m = \{H / H \in \mathbb{C}^{m \times m}; H^\dagger = H\}$ (matrices complejas de $m \times m$ hermíticas).

Ej. 4 — En \mathbb{R}^4 , encuentre una base y la dimensión del subespacio generado por $x = (1, -4, -2, -1)$, $y = (1, -3, -1, 2)$, $z = (3, -8, -2, 7)$. Extienda la base a una base de \mathbb{R}^4 .

Ej. 5 — Expresé

- a) $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ como c.l. de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 b) $p(t) = t^2 + 4t - 3 \in \mathbb{P}[\mathbb{R}]$ (Polinomios de una variable real con coeficientes reales) como c.l. de $p_1(t) = t^2 - t + 5$, $p_2(t) = 2t^2 - 3t$ y $p_3(t) = t + 3$.
 c) Encuentre una condición sobre a , b y c para que (a, b, c) se escriba como c.l. de $u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, -1, -1)$.

Ej. 6 — Dado un vector $p(t) = \sum_{n=0}^3 a_n t^n \in \mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ (polinomios de grado ≤ 3 en una variable real),

- a) Hallar sus componentes en la base $e_n = t^{n-1}$ ($n = 1; \dots, 4$).
 b) Hallar sus componentes en la base $e'_n = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$.

Ej. 7 — Encuentre una base y la dimensión de los siguientes subespacios de \mathbb{R}^3 :

- $W = \{(\alpha, \beta, \gamma) / \alpha + \beta + \gamma = 0\}$.
- $W = \{(\alpha, \beta, \gamma) / \alpha = \beta = \gamma\}$.

Ej. 8 — Sean $U = \mathcal{S}\{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)\}$ y $W = \mathcal{S}\{(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -1), (1, 3, 4, -3)\}$ dos subespacios de \mathbb{R}^4 . Encuentre

- $\dim(U + W)$
- $\dim(U \cap W)$

Tip: Ya que no se pide una base de esos subespacios, utilice el teorema de la dimensión $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$.

Ejercicios adicionales (opcionales)

Ej. 9 — Dado un vector $v = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ (el espacio vectorial de los complejos sobre el cuerpo de los reales),

- a) Hallar sus componentes en la base $e_1 = 1, e_2 = i$.
- b) Hallar sus componentes en la base $e'_1 = -1 + i, e'_2 = 1 + i$.

Ej. 10 — Espacios de polinomios

- a) Demuestre que $1; t; t^2; \dots; t^k$ son polinomios linealmente independientes sobre el cuerpo de los reales, para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Sugerencia: utilice el teorema fundamental del álgebra.
- b) ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{P}_k[\mathbb{R}]$ (Polinomios sobre una variable real con coeficientes reales, de grado $\leq k$)?
- c) Justifique la siguiente afirmación: la dimensión de $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$ es infinita.

Ej. 11 — Dado el espacio vectorial $\mathbb{V}_{\mathbb{K}}$ de las matrices cuadradas $\mathbb{K}^{n \times n}$ sobre el cuerpo \mathbb{K} ,

1. Demuestre que $\mathbb{V}_{\mathbb{K}} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ donde \mathcal{U} es el subespacio de las matrices simétricas $M^T = M$ y \mathcal{W} el subespacio de las matrices antisimétricas $M^T = -M$
2. Demuestre que $\mathbb{V}_{\mathbb{K}}$ no es suma directa del subespacio de las matrices triangulares superiores (\mathcal{TS}) e inferiores (\mathcal{TI}), aunque sí es suma de ambos subespacios.

Ej. 12 — Encuentre la dimensión y una base para el espacio vectorial de las soluciones de

$$\begin{cases} x + 2y + z - 3t = 0 \\ 2x + 4y + 4z - t = 0 \\ 3x + 6y + 7z + t = 0 \end{cases}$$

Ej. 13 — Sean $U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) / \beta + \gamma + \delta = 0\}$ y $W = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) / \alpha + \beta = 0 \wedge \gamma = 2\delta\}$ dos subespacios de \mathbb{R}^4 . Encuentre una base y la dimensión de

1. U
2. W
3. $U + W$
4. $U \cap W$

Ej. 14 — Matrices de Pauli: Observe que $\{H / H \in \mathcal{H}_2; \text{tr}H = \sum_i H_{ii} = 0\}$, el conjunto de las matrices hermíticas de 2×2 cuya traza es nula, es un subespacio de \mathbb{H}_2 y que las matrices $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ forman una base de ese subespacio. Expandir en esta base una matriz general H en dicho subespacio, en términos de sus elementos de matriz H_{ij} . Expresar el determinante de H en términos de los coeficientes de expansión en la base dada por los σ_i .