3. Independencia lineal, bases y dimensión

Los vectores $v_1, \ldots, v_n \in V$ son **linealmente independientes** (LI) si y sólo si (sii) la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

implica

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

De lo contrario, los vectores son **linealmente dependientes** (LD).
Para $n = 1$, esta definición implica que v_1 es LI sii es un vector no nulo (Prop. básica d).
Si $n > 1$, los vectores son LD sii al menos uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los restantes, es decir, si pertence al espacio generado por los restantes. En efecto, si son LD existe al menos un α_i, por ej., α_1, que es no nulo ($\alpha_1 \neq 0$). En tal caso,

$$v_1 = -(\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)/\alpha_1$$

Análogamente, si $v_1 = \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \Rightarrow v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_n v_n = 0$, siendo $\alpha_1 = 1 \neq 0$, por lo que son LD.

Para $n = 2$, esto implica que dos vectores no nulos son LI sii no son proporcionales (es decir sii $\nexists\ \alpha \in K$ t.q. $v_2 = \alpha v_1$). En $V = \mathbb{R}^3$, tres vectores no nulos y no paralelos son LI sii ninguno de ellos pertenece al plano generado por los otros dos.
Si uno de los vectores es nulo, los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son LD: Por ejemplo, si $v_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n = 0$ para $\alpha_1 \neq 0$, lo que implica que son LD.
En general, si el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ contiene un subconjunto de vectores LD entonces el conjunto total es LD (Probar).

Teorema. Sean $\{b_1, \ldots, b_n\}$ n vectores LI. Entonces los n vectores

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} b_i = S_{1j} b_1 + \ldots + S_{nj} b_n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad S_{ij} \in K \qquad (1)$$

son LI si y sólo si la matriz S de coeficientes S_{ij} (de $n \times n$) es *no singular* ($\mathrm{Det}[S] \neq 0$).
Dem.: Si

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\sum_{i=1}^{n} S_{ij} b_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} S_{ij} \alpha_j) b_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \alpha_j$$

debe ser $\beta_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ por ser los b_i LI. Es decir, $\sum_{j=1}^{n} S_{ij} \alpha_j = 0, \ i = 1, \ldots, n$, o en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1n} \\ & \ldots & \\ S_{n1} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto constituye un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas α_j, $j = 1, \ldots, n$. Si los v_j son LI, la única solución de este sistema debe ser $\alpha_j = 0\ \forall j$ y por lo tanto la matriz S debe ser *no singular*. Por otro lado, si S es no singular, la única solución del sistema es $\alpha_j = 0$ para $j = 1, \ldots, n$ y por lo tanto los vectores v_j son LI.

Corolario: Si S es no singular, el subespacio generado por $M = \{b_1, \ldots, b_n\}$ y $M' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ **es el mismo** ($\overline{M} = \overline{M'}$).
Dem.: Si S es no singular, *existe la matriz inversa* S^{-1}, t.q. $SS^{-1} = S^{-1}S = I$, es decir, $\sum_{j=1}^{n} (S^{-1})_{kj} S_{ji} = \delta_{ki}$. Esto implica que **existe la transformación inversa de** (1), dada por

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} (S^{-1})_{ji} v_j, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

ya que $\sum_{j=1}^{n} (S^{-1})_{ji} v_j = \sum_{j=1}^{n} (S^{-1})_{ji} (\sum_{k=1}^{n} S_{kj} b_k) = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} S_{kj} (S^{-1})_{ji}) b_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki} b_k = b_i$.
Por lo tanto, de (1) es obvio que $\overline{M'} \subset \overline{M}$ (pues $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$, con $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \alpha_j$), y de (2) es obvio que $\overline{M} \subset \overline{M'}$ (pues $\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, con $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} (S^{-1})_{ji} \beta_i$), por lo que $\overline{M} = \overline{M'}$.

Ejemplo: Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un conj. LI en un cierto espacio, los vectores $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$ y $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$ son LI ya que $\text{Det}[S] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Como $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la transformación inversa está dada por $e_1 = v_1$, $e_2 = v_2 - v_1$, $e_3 = v_3 - v_2$, como es fácil comprobar. Los vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ generan pues el mismo subespacio que $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Bases

Sea V un espacio vectorial, que supondremos distinto del subespacio trivial $S = \{0\}$. Un conjunto finito $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset V$ es una base de V si los vectores de B
1) Son LI
2) Generan V $\quad (\overline{B} = V)$.

La base no es única. Si B es una base de V, cualquier conjunto $B' = \{b'_1, \ldots, b'_n\} \subset V$ de n vectores linealmente independientes es también una base (ver teorema anterior y prop. **1)** abajo).

Ejemplo 1: Si $V = \mathbb{R}^n$, el conjunto $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, con $e_i = (0, \ldots, 0, 1_{(i)}, 0, \ldots, 0)$, es una base, denominada *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.
En efecto, son LI pues si $0 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Y generan V pues $(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$.
Pero también es base el conjunto $\{(1, 0, \ldots, 0), (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (1, 1, \ldots, 1)\}$. (Probarlo!).
Ejemplo 2: Escribir la base canónica de $\mathbb{R}^{m \times n}$.
Ejemplo 3: Si V es el subespacio de polinomios de grado ≤ 2, una base es $\{e_1, e_2, e_3\}$, donde $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, denominada también base canónica.

Si V es generado por un conjunto finito de vectores $M = \{v_1 \ldots, v_m\}$ y $V \neq \{0\} \Rightarrow$ existe una base $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de V incluida en M.
Dem.: Sea $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ un subconjunto de M tal que los vectores de B sean LI y el número n de elementos de B sea máximo. Obviamente $n \geq 1$, pues $\overline{M} = V$ y $V \neq \{0\}$, por lo que existe al menos un vector no nulo en M. Si $v \in M \Rightarrow v \in \overline{B}$, pues los vectores $\{v, b_1, \ldots, b_n\}$ son necesariamente LD (pues son $n + 1$) y por lo tanto, existe una combinación

$$0 = \alpha v + \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$$

con coeficientes no todos nulos. Si $\alpha = 0 \Rightarrow 0 = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$, pero en tal caso $\alpha_i = 0 \; \forall \, i$ por por ser los b_i LI. Por consiguiente, $\alpha \neq 0$ y $v = -(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n)/\alpha \in \overline{B}$. Por lo tanto, $M \subset \overline{B}$ y entonces $V = \overline{M} = \overline{B}$.

Del teorema de la sección anterior se desprenden ahora las sig. propiedades fundamentales.
Si $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es una base de V, entonces:

1) Cualquier conjunto de n vectores LI $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ es también una base de V.
Dem.: Como B es base, los n vectores v_j pueden ser escritos en la forma (1), con S no singular dado que son LI. Pero en tal caso el espacio generado es el mismo, por lo que forman también una base de V.
En particular, los n vectores $v_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} b_i$, $j = 1, \ldots, n$, forman una base de V sii S es no singular.

2) Todo conjunto de $n + 1$ vectores $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\} \subset V$ es LD.
Dem.: Supongamos que son LI. $\Rightarrow$ los primeros n vectores son LI. Pero en tal caso forman una base, por el corolario anterior, por lo que v_{n+1} pertenece al espacio generado por ellos y el conjunto es entonces LD.
Todo conjunto con $m > n$ vectores es por lo tanto también LD. Y un conjunto con $m < n$ vectores no podría ser base, pues en tal caso B no sería base.

Como consecuencia, todas las bases de un espacio V tienen **el mismo número de elementos**, n. A ese número se lo denomina **dimensión** del espacio V: $n = \dim V$. Representa el máximo número de vectores LI. Un espacio en el que $\exists$ un N^o arbitrariam. grande de vectores LI se dice que tiene dimensión infinita.
Ejemplo: La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n, y la de $\mathbb{R}^{m \times n}$, $m \cdot n$. La de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es ∞.
La dimensión de $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$ es también n (una base es $\{e_1, \ldots, e_n\}$, con $e_j = (0, \ldots, 1_{(j)}, \ldots, 0)$, $j = 1, \ldots, n$), mientras que la dimensión de $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$ es $2n$ (una base es $\{e_1, \ldots, e_n, \tilde{e}_1, \ldots \tilde{e}_n\}$, con $\tilde{e}_j = (0, \ldots, i_{(j)}, \ldots, 0)$).

4. Coordenadas de un vector en una base y cambio de base

Si $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ es una base de V, todo vector $v\in V$ puede escribirse en forma **única** como combinación lineal de elementos de B. Dem.: Si $v\in V$ y

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 b_1+\ldots+\alpha_n b_n \\ &= \alpha'_1 b_1+\ldots+\alpha'_n b_n \end{aligned}$$

entonces

$$0=(\alpha_1-\alpha'_1)b_1+\ldots+(\alpha_n-\alpha'_n)b_n$$

por lo que $\alpha_i=\alpha'_i$ para $i=1,\ldots,n$ por ser los vectores LI.
Análogamente, si todo vector de V puede escribirse en forma única como comb. lineal de los b_i, estos son LI pues en particular, la única forma de escribir el vector nulo será $0=0b_1+\ldots 0b_n$.
Los coeficientes $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ que determinan el vector v son pues únicos y reciben el nombre de **coordenadas** del vector v en la base dada.

Cambo de base

Consideremos en lo sucesivo **bases ordenadas** $B=(b_1,\ldots,b_n)$, con el objeto de asignar un orden determinado a las coordenadas de un vector. Si B es una base de V, todo $v\in B$ puede representarse como

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i,\quad \alpha_i\in K$$

Consideremos ahora otra base $B'=(b'_1,\ldots,b'_n)$ de V. Por ser B base podemos también escribir

$$b'_j=\sum_{i=1}^{n}S_{ij}b_i,\quad j=1,\ldots,n$$

donde los elementos S_{ij}, $i=1,\ldots,n$ (columna j de S) son las coordenadas de b'_j en la base B. La matriz

$$S=\begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n1} & \ldots & S_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . \\ [b'_1]_B & \ldots & [b'_n]_B \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

se denomina *matriz de cambio de base* y debe ser *no singular* ($\mathrm{Det}[S]\neq 0$), por lo demostrado anteriormente.
Podemos ahora escribir v en la base B' como

$$v=\sum_{j=1}^{n}\alpha'_j b'_j$$

donde α'_j son las coordenadas de v en la base B'. Escribiendo b'_j en términos de los b_i, obtenemos

$$v=\sum_{j=1}^{n}\alpha'_j(\sum_{i=1}^{n}S_{ij}b_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i,\quad \alpha_i=\sum_{j=1}^{n}S_{ij}\alpha'_j,\ i=1,\ldots,n$$

En forma matricial, esto puede escribirse como

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \ldots \\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n1} & \ldots & S_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \ldots \\ \alpha'_n\end{pmatrix}$$

o, en forma concisa,

$$[v]_B=S\,[v]_{B'}$$

donde

$$[v]_B\equiv\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \ldots \\ \alpha_n\end{pmatrix},\ [v]_{B'}=\begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \ldots \\ \alpha'_n\end{pmatrix}$$

denotan las matrices columna de coordenadas de v en las bases B y B' respectivamente. Podemos entonces determinar $[v]_{B'}$ a partir de $[v]_B$ como

$$[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B$$

donde S^{-1} es la matriz inversa de S. Remarquemos que la forma de construir S es notando que su columna i es la matriz columna de coordenadas de b'_i en la base B, es decir, $[b'_i]_B$. Notemos también que la columna i de S^{-1} es la matriz de coordenadas de b_i en la base B' ($[b_i]_{B'}$).

Fialmente, notemos que si $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha \in K$, se tiene obviamente

$$[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B, \quad [\alpha v]_B = \alpha[v]_B$$

Ejemplo 1: Sea $B = (e_1, e_2)$, con $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ la base canónica en R^2. Consideremos ahora la nueva base $B' = (e'_1, e'_2)$, donde

$$e'_1 = (1, 0), \quad e'_2 = (1, 1)$$

o sea, $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$. En este caso,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $v = (x, y) = xe_1 + ye_2$, podemos escribir también $v = x'e'_1 + y'e'_2$ con

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}$$

Se verifica que $x'e'_1 + y'e'_2 = (x - y)e_1 + y(e_1 + e_2) = x_1e_1 + ye_2$. Notemos además que las columnas de S^{-1} son las coordenadas de la base canónica en la nueva base: $e_1 = e'_1$, $e_2 = -e'_1 + e'_2$.

Ej. sugerido: Hallar las coordendadas de $v = (x, y)$ en la base formada por $e'_1 = (1, 0)$, $e'_2 = (1, \varepsilon)$, con $\varepsilon \neq 0$, y analizar el límite $\varepsilon \to 0$.

Ejemplo 2: Rotación en el plano. Sean nuevamente $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ los vectores de la base canónica en R^2 y sean $e'_1 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$, $e'_2 = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$. Estos vectores son los vectores e_1, e_2 rotados un ángulo θ en sentido antihorario respecto del eje x (recordar dibujo hecho en clase). Tenemos

$$S = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

(o sea, $S^{-1}(\theta) = S(-\theta) = S(\theta)^t$). Por lo tanto, las coordenadas x', y' en la base rotada de un vector $v = (x, y) = xe_1 + ye_2$ son

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

de forma que $v = x'e'_1 + y'e'_2$. (Verificar que $x'e'_1 + y'e'_2 = xe_1 + ye_2$!).

Ejemplo 3: Ecuación de una elipse rotada un ángulo θ (antihorario) respecto del eje x. Respecto del sistema rotado tenemos la ecuación

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

con a, b los semiejes de la elipse. Reemplazando $x' = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$, $y' = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$, obtenemos

$$x^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) + y^2\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right) + xy\sin(2\theta)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 1$$

Si $a = b$ (circunferencia) la forma de la ecuación permanece invariante.

Ejemplo 4: Producto escalar usual en R^2 expresado en base arbitraria: El producto escalar usual en la base canónica puede expresarse como

$$v_1 \cdot v_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = [v_1]_e^t \cdot [v_2]_e$$

donde x_i, y_i, $i = 1, 2$ son las coordenadas de v_1, v_2 en la base canónica ($v_i = (x_i, y_i)$) y t denota traspuesto. Reemplazando $[v_i]_e = S[v_i]_{e'}$, obtenemos, para una base arbitraria e',

$$v_1 \cdot v_2 = (S[v_1]_{e'})^t(S[v_2]_{e'}) = [v_1]_{e'}^t(S^tS)[v_2]_{e'}$$

El producto escalar queda entonces determinado por la matriz *simétrica* S^tS y tendrá en general términos "cruzados" $\propto x_1y_2$ y x_2y_1 además de "diagonales" proporcionales a x_1x_2 y y_1y_2. En el caso de rotaciones, $S^t = S^{-1}$ y por lo tanto la forma del producto escalar usual permanece *invariante*.