Electromagnetismo - Lic. Física

Año 2022

Prof: O. Civitarese — JTP: D.G. Actis — Ay. Dipl: P. Sotomayor

Práctica 8 — Simetrías de las ecuaciones de Maxwell

Transformaciones de Lorentz y transformaciones de Gauge

Problema 1. Transformaciones de Lorentz

a) Muestre que las componentes contravariantes $x^\mu = (ct, \vec{x})$ de un tetravector se conectan con las componentes $(x')^\nu$ en un sistema de referencia con velocidad relativa **v** según el boost

$$(x')^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu \ \text{ con } \ \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,\boldsymbol{\beta}^t \\ -\gamma\,\boldsymbol{\beta} & \mathbb{I}_{3\times 3} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^t \end{pmatrix}$$

b) Demuestre que el intervalo $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ es una cantidad invariante ante cambios de sistemas de coordenadas (aquí $\eta_{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{I}_{3\times 3} \end{pmatrix}$ es el *tensor métrico*)

c) Construya en forma explícita la transformación de Lorentz inversa al boost presentado.

d) Muestre que los boosts junto con las rotaciones espaciales forman un grupo (el grupo de Lorentz propio). Tip: analice las transformaciones infinitesimales.

Problema 2. Forma covariante de las Ec. de Maxwell Se define el tensor de campo electromagnético a partir de las componentes de los campos eléctrico **E** y magnético **B** como

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dé la expresión covariante para la Fuerza de Lorentz sobre una partícula cargada con cuadrivelocidad $u^\mu = \gamma\, c\,(1, \boldsymbol{\beta})$.

b) Muestre que las ecuaciones de Maxwell se expresan como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \qquad\qquad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

con $J^\mu = \left(c\rho, \vec{J}\right)$ el tetravector *densidad de corriente* y $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ el tensor dual de Hodge de $F^{\mu\nu}$. $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ es el *tensor de Levi-Civita*, $\epsilon^{0123} = 1$ al igual que todas las permutaciones pares de esos índices, las permutaciones impares dan -1 y si se repiten índices da 0.

Nota: la derivada nula del dual es equivalente a la identidad de Bianchi sobre el tensor F ($\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$).

c) Mediante sus propiedades de transformación, dé la expresión para los campos $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ observados desde un sistema de referencia en movimiento, con velocidad $\vec{v}$.

d) Muestre que $\vec{E}\cdot\vec{B}$ y $\vec{E}^2 - \vec{B}^2c^2$ son cantidades invariantes ante transformaciones de Lorentz.

Problema 3. Efecto Doppler relativista

a) Construya el tensor $F^{\mu\nu}$ para una onda plana electromagnética originada por una fuente en reposo, en la aproximación de onda plana.

b) Calcule cómo transforman las componentes de $F^{\mu\nu}$ bajo transformaciones de Lorentz.

c) Determine la frecuencia y longitud de onda que detecta la onda un observador que se mueve con velocidad relativa $\vec{v}$ respecto a la fuente si i) se acerca a la fuente ii) se aleja a la fuente iii) se mueve en dirección perpendicular a la dirección en la que está la fuente.

Problema 4. Tensor de energía-impulso El tensor de Energía-Impulso del campo electromagnético se define según

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\alpha}F^{\beta\nu}\eta_{\alpha\beta} + \frac{\eta^{\mu\nu}}{4}F^{\alpha\beta}F^{\alpha'\beta'}\eta_{\alpha\alpha'}\eta_{\beta\beta'}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\alpha\nu}F^{\mu}{}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)$$

Dé una interpretación de sus componentes y mueestre que satisface

a) Es simétrico, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

b) Tiene traza nula, $T^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = T^{\mu}{}_{\mu} = 0$

c) $T^{00} \geq 0$

d) $\partial_\nu T^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}J_\nu = 0$

Problema 5. Potencial tetravector

a) Muestre que las Ec. de Maxwell homogéneas se satisfacen trivialmente si, $F^{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha A^\beta/2 = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ para cualquier campo tetravector A^μ bien comportado.

b) Dé una expresión para las componentes de A^μ en términos del potencial escalar ϕ y el potencial vector $\vec{A}$.

c) Muestre que A^μ y $A^\mu + \partial^\mu f$ dan origen al mismo $F_{\mu\nu}$ para cualquier función f de la posición y el tiempo bien comportada, y que por lo tanto, se puede asumir que $\partial_\mu A^\mu = g$ para g función arbitraria de la posición y el tiempo.

d) ¿Qué condición debe satisfacer A^ν para que $F^{\mu\nu}$ sea solución de las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas?

A partir de aquí opcionales (no cuentan para la entrega de la práctica)

Problema 6. Solución fundamental en el gauge de Lorentz Muestre que

$$A_\mu(x^\nu) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J_\mu((x')^\nu)\delta(t' - t + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{|(x^\mu - (x')^\mu)U_\mu|} d^4x'$$

con $U_\mu = \partial_\mu(ct)$, $x^\mu = (ct, \vec{x})$ y $(x')^\mu = (ct', \vec{x}')$ a) Transforma como un campo tetravectorial, b) satisface la condición del gauge de Lorentz y c) es solución de $\Box A_\mu = \mu_0 j_\mu$.

Problema 7. Fuentes dipolares Considere una distribución de cargas y corrientes, con carga neta nula, tales que respecto a cierto sistema de referencia, poseen un momento dipolar eléctrico $\vec{p}_0$ y un momento dipolar magnético $\vec{m}_0$ estacionarios, localizados cerca del origen. a) Determine el correspondiente tetravector potencial, a grandes distancias del origen. b) Determine la forma de los campos eléctrico y magnético. c) Dé una expresión covariante para ese potencial tetravector. d) Determine a partir de esa expresión cómo deberían transformar los momentos dipolares ante transformaciones de Lorentz.

Problema 8. Gauge de Coulomb Considere una elección de gauge tal que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ respecto de un cierto sistema de coordenadas. a) Escriba las ecuaciones que satisfacen las componentes de $\vec{A}$ en dicho sistema de coordenadas. b) Determine qué condición de gauge satisface A_μ respecto de un sistema de referencia en movimiento a velocidad $\vec{v}$. c) Determine la transformación de gauge que debe realizarse para que el potencial en el nuevo sistema de referencia cumpla con $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$. d) Muestre que en el gauge de Coulomb, la fuente del potencial vector es la componente transversal de la densidad de corriente. e) Muestre que para un sistema de cargas y corrientes estacionarias, los gauges de Coulomb y Lorentz son equivalentes.