Electromagnetismo - Lic. Física

Año 2022

Prof: O. Civitarese — JTP: D.G. Actis — Ay. Dipl: P. Sotomayor

Práctica 2 — Electrostática – Técnicas Especiales

Separación de variables, Método de las Imágenes. Funciones de Green.

Problema 1. Separación de variables. Determine el potencial en el interior de un cubo de lado a en los siguientes casos. Sugerencia: aproveche la simetría y el principio de superposición para no repetir cálculos.

a) Una de sus caras está conectada a un potencial de 1 V y el resto están conectadas a tierra (0 V).

b) Un par de caras opuestas está conectado a un potencial de 1 V y el resto de las caras están conectadadas a tierra.

c) Dos caras que comparten una arista están conectadas a potenciales de 1 V y -1 V respectivamente, y el resto están conectadas a tierra.

d) Cada una de las caras está conectada a un potencial distinto respecto de tierra.

Problema 2. Una esfera aislante de radio R tiene densidad de carga superficial σ en su hemisferio superior, y $-\sigma$ en su hemisferio inferior. Determine el campo electrostático generado en todo el espacio, y el término dominante a grandes distancias de la esfera.

Problema 3. Método de las Imágenes I. Una esfera conductora de radio a se encuentra en presencia de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$. Encuentre el potencial en todo el espacio y la densidad de carga inducida en la esfera.

Problema 4. Método de las Imágenes II. . Considere una esfera conductora maciza de radio $a = 10$ cm, aislada y de carga nula. Frente a ella, se ubica un hilo recto de espesor despreciable, densidad lineal de carga $\lambda = 1$ µC/m y longitud $L = 20$ m. El centro del alambre es su punto más cercano al centro de la esfera, a una distancia mínima de $b = 20$ cm.

a) Determine la densidad de carga imagen dentro de la esfera necesaria para que la esfera sea una superficie equipotencial.

b) Encuentre una expresión para el potencial electrostático en el entorno de la esfera (considerando al alambre como infinito para su contribución al potencial).

c) Dé una expresión para la densidad de carga inducida.

Problema 5. Método de las Imágenes III. Se coloca un hilo rectilíneo uniformemente cargado con densidad lineal de carga λ entre dos planos conductores puestos a tierra. Los planos están separados entre sí una distancia L, y el hilo se encuentra a una distancia d de uno de ellos. Calcule el potencial electrostático en la zona comprendida entre los planos conductores. Válgase de la identidad

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{senh}(\pi t)}{\pi t}$$

Problema 6. Mapeos conformes. En el plano complejo $z = x + iy$, cualquier función analítica de z tendrá parte real e imaginaria que satisfacen la ecuación de Laplace. Cualquier mapeo conforme conservará esa propiedad.

a) Considerando el plano $y \geq 0$, muestre que la función $\phi(x,y) = \Re\left\{-i\frac{V_0}{\pi}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right\}$ cumple la condición de contorno

$$\phi(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ V_0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

b) Con un mapeo conforme adecuado determine el potencial en el interior de una cinta rectangular (bidimensional) semi-infinita de ancho $A = 5$ cm, si el borde finito se encuentra a potencial $V_0 = 9$ V, y los otros lados se encuentran a $V = 0$ V.

c) Con un nuevo mapeo conforme calcule el potencial en el interior de un sector circular de radio R y abertura α, cuyo lado curvo se encuentra a potencial $V_0 = 9$ V y sus dos bordes radiales a potencial $V = 0$ V.

Problema 7. Propiedades de las soluciones de la ec. de Laplace. Muestre que si $-\nabla^2\phi(x) = 0$

a) **Propiedad del promedio.** Para una esfera de superficie $\mathcal{S}$ centrada en $\vec{r}_0$,

$$\phi(\vec{r}_0) = \frac{\int_{\mathcal{S}} \phi(\vec{r})dS}{\int_{\mathcal{S}} dS} = \langle \phi(\vec{r}) \rangle_{\mathcal{S}}$$

b) **Propiedad extremal.** Si $\phi(\vec{x})$ satisface cierta condición de borde $\phi(\vec{x})|_{\mathcal{S}} = g(\vec{x})$ sobre cierta superficie cerrada $\mathcal{S}$ que encierra a un volumen V, entonces $\phi(\vec{x})$ minimiza la funcional

$$U[\psi] = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \left| \vec{\nabla}\psi(\vec{x}) \right|^2 dV$$

sobre todas las funciones regulares $\psi(\vec{x})$ que cumplen la misma condición de borde $\psi(\vec{x})|_{\mathcal{S}} = g(\vec{x})$.

Problema 8. Propiedades de la función de Green. Muestre que la función de Green $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ es una función simétrica frente al cambio $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}\,'$ en el caso de condiciones de contorno de Dirichlet, y que puede elegirse simétrica para las condiciones de Neumann.

Problema 9. Condiciones de Dirichlet. Considere una esfera de radio R está formada por un hemisferio conductor a potencial V y otro a potencial $-V$.

a) Halle el campo electrostático en todo el espacio, y el término dominante a grandes distancias de la esfera.

b) Calcule la densidad de carga sobre la superficie de la esfera.

Problema 10. Condiciones de Neumann. Calcule el campo electrostático $\vec{E}(x, y, z)$ en la región $x > 0$, en ausencia de cargas, con la condición de contorno

$$E_x(0, y, z) = \begin{cases} \frac{E_0}{a^2}(a^2 - y^2 - z^2) & \text{si } y^2 + z^2 < a^2 \\ 0 & \text{si } y^2 + z^2 \geq a^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Problema 11. (Opcional) Aproximaciones. Considere un prisma de largo $L = 5$ m, cuya sección es un triángulo equilátero de área 1 cm^2. Construya una solución aproximada de la ecuación de Laplace en su interior asumiendo que sobre una de sus caras se encuentran a potenciales $V_1 = 0$ V, $V_2 = 1$ V y $V_3 = -1$ V.