Electromagnetismo - Lic. Física

Año 2022

Prof: O. Civitarese — JTP: D.G. Actis — Ay. Dipl: P. Sotomayor

Práctica 0 — Repaso y algo más

Campos escalares y vectoriales, cálculo diferencial e integral, delta de Dirac. EDOs.

Problema 1. Grafique las siguientes curvas, y calcule sus vectores velocidad en función del parámetro t:

1. $\sigma(t) = \hat{\mathbf{x}}/t$ con $0 < t < 1$.
2. $\sigma(t) = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}t$ con $\mathbf{r}_0 = (1,1,1)$, $\Delta\mathbf{r} = (1,-1,-1)$ y $0 < t < 1$.
3. $\sigma(t) = (\cos(t) - 1)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(t) + 2)\hat{\mathbf{y}}$, $0 < t < \pi/2$
4. $\sigma(t) = \cos(t)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(t) - 2)\hat{\mathbf{y}} + (3t)\mathbf{z}$, $0 < t < 10$
5. $\sigma(t) = \sin(t)\hat{\mathbf{x}} - 3t\hat{\mathbf{y}}$ con $0 < t < 4\pi$.

Problema 2. Grafique las siguientes superficies, y encuentre los correspondientes elementos de área:

1. $A(u,v) = (1-u)\hat{\mathbf{x}} + (1-v)\hat{\mathbf{y}}$ $0 < u, v < 1$.
2. $A(\theta,\phi) = (\cos(\phi)\sin(\theta) - 1)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(\phi)\sin(\theta) + 1)\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\cos(\theta)\hat{\mathbf{z}}$, $0 < \theta < \pi/2$, $-\pi < \phi < \pi$.
3. $A(z,\phi) = \cos(\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(\phi) - 1)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $0 < \phi < \pi$, $-1 < z < 1$.

Problema 3. Dé una parametrización para las siguientes curvas:

1. Un segmento de recta que sale del punto $(1,0,0)$ y llega hasta el punto $(1,2,1)$
2. Un segmento de circunferencia que sale del punto $(1,0,0)$, pasa por el punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y llega al punto $(0,1,0)$.

Problema 4. Dé una parametrización para las siguientes superficies, y sus correspondientes elementos de área:

1. El paralelogramo generado por los vectores $(0,0,0)$, $(1,0,1)$ y $(1,1,0)$.
2. La esfera de radio 2 centrada en el punto $(1,0,0)$.
3. Un cilindro de largo 2, centrado en el origen, coaxial con el eje z, y de radio 1.

Problema 5. Dé una parametrización para los siguientes volúmenes, y sus correspondientes elementos de volumen:

1. Un cubo de lado 1, centrado en el origen, y con sus caras perpendiculares a los ejes cartesianos.
2. La esfera de radio 1, centrada en el origen.
3. Un cilindro de largo 2, centrado en el origen, coaxial con el eje z, y de radio 1.

Problema 6. Sea $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}} + z_0\hat{\mathbf{z}}$. Determine el gradiente de las funciones $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ y $g(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1}$.

Problema 7. Calcule la divergencia y el rotor de los siguientes campos vectoriales

1. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$
2. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}}$
3. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = z\hat{\mathbf{z}}$
4. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2+a^2}$
5. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}$
6. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y^2\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2yz\hat{\mathbf{z}}$
7. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ con $\mathbf{E_0}$ y $\mathbf{k}$ vectores constantes.

Problema 8. Demuestre que a) La divergencia del rotor de una función suave es siempre nula. b) El rotor del gradiente de una función suave es siempre nulo.

Problema 9. Dé las expresiones generales para $\vec{\nabla}\psi(\vec{r})$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ y $\nabla^2\psi(\vec{r})$ en coordenadas

a) Cilíndricas.

b) Esféricas.

c) Ortogonales generales ortogonales.

Problema 10. Demuestre las siguientes identidades, donde $\phi(\vec{r})$ es un campo escalar ($\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) y $\vec{A}(\vec{r})$ un campo vectorial ($\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$). Sugerencia: utilizar la notación de Einstein, donde la suma sobre índices repetidos está implícita.

a) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

b) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

c) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$

Problema 11. Demuestre las siguientes identidades para los campos vectoriales $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

b) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

c) $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

Problema 12. Integrales de línea Calcule las integrales de linea asociadas al campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y\hat{\mathbf{x}} + 2x\hat{\mathbf{y}}$ a lo largo de las siguientes curvas:

1. Moviendose en linea recta desde el punto $\mathbf{a} = (2, -2, 0)$ al punto $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$.
2. Moviendose en linea recta desde el punto $\mathbf{a}$ al punto $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$, y de ahí nuevamente en linea recta al punto $\mathbf{b}$.
3. Recorriendo un arco de circunferencia centrado en el origen, que va del punto $\mathbf{a}$ al punto $\mathbf{b}$.
4. Moviendose en linea recta desde el punto $\mathbf{a}$ al punto $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$, y de ahí nuevamente en linea recta al punto $\mathbf{b}$, y finalmente, volviendo en linea recta hasta el punto $\mathbf{a}$.

Repita los cálculos para el campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 2xy^2\mathbf{x} + 2yx^2\mathbf{y}$

Problema 13. Integrales de superficie Calcule las integrales de flujo asociadas al campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 2xz\hat{\mathbf{x}} + (x+2)\hat{\mathbf{y}} + y(z^2-3)\mathbf{z}$ sobre la superficie de un cubo de lado 2, con un vértice en el origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ y sus aristas paralelas a los ejes coordenados, excluyendo la cara que contiene al punto $(1, 1, 0)$.

Problema 14. Integrales de volumen Calcule las siguientes integrales de volumen sobre el cubo unitario $V = \{\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}/0 \leq x, y, z \leq 1\}$:

1. $\int_V f(\mathbf{r})dV$ con $f(\mathbf{r}) = xyz^2$
2. $\int_V f(\mathbf{r})dV$ con $f(\mathbf{r}) = z^2$

Problema 15. Teorema fundamental Compruebe el teorema fundamental para gradientes usando $\phi(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2yz^3$ para calcular la integral de línea de la función $\mathbf{T}(x, y, z) = \vec{\nabla}\phi(x, y, z)$ desde el punto $a = (0, 0, 0)$ al punto $b = (1, 1, 1)$ y los caminos:

a) $(0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (1, 1, 1)$ de a tramos rectos.

b) por el camino parabólico $z = x^2$, $y = x$.

Problema 16. Soluciones Ec. Diferenciales lineales 1. Encuentre la solución general de la Ec. diferencial

$$\frac{df(t)}{dt} + \lambda f(t) = 0$$

y grafique el caso en que $f(0) = 1$ y $\lambda = 2$.

Problema 17. Soluciones Ec. Diferenciales lineales 2. Encuentre la solución general de la Ec. diferencial

$$\frac{df(t)}{dt} + \lambda f(t) = e^{-t^2/a^2}$$

y grafique el caso en que $f(-\infty) = 0$, $a = 1$ y $\lambda = 2$.

Problema 18. Soluciones Ec. Diferenciales lineales 3. Encuentre la solución general de la Ec. diferencial

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \eta\frac{df(t)}{dt} + \lambda f(t) = 0$$

y grafique el caso en que $f(0) = 1$, $\frac{df(0)}{dt} = 0$ si a) $\eta = 1$, $\lambda = 4\pi^2$, b) $\lambda = 4\pi^2 = \eta^2/4$ y c) $\lambda = 4\pi^2 = \eta^2/8$.

Problema 19. Delta de Dirac Considere la Delta de Dirac, una distribución (o función generalizada) tal que para cualquier función continua $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } a < x_0 < b \\ 0 & \text{si } x_0 < a \vee b < x_0 \end{cases}$$

y su extensión a tres dimensiones $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$. Calcule las siguientes integrales de volumen

a) $\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a})(r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + a^2)d^3\mathbf{r}$ (con $\mathbf{a}$ un vector fijo y $a = |\mathbf{a}|$) sobre todo el espacio.

b) $\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{d})(r^4 + r^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{d} + d^4)d^3\mathbf{r}$ (con $\mathbf{d} = (5, 3, 2)$) sobre la esfera de radio 6 centrada en el origen.

c) $\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{d})\mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{r})d^3\mathbf{r}$ (con $\mathbf{d} = (5, 3, 2)$) sobre la esfera de radio 6 centrada en $\mathbf{c} = (2, 2, 2)$.

Problema 20. El espacio de funciones en un intervalo $[a, b]$ es un espacio vectorial de dimensión infinita. UNa base para dicho espacio es necesariamente un conjunto infinito de funciones linealmente independientes $B = \{f_n(x)/n \in \mathbb{Z}\}$. Dicha base es ortonormal si satisface que

$$\int_a^b f_n^*(x) f_m(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

No es suficiente sin embargo que las infinitas funciones sean linealmente independientes para constituir una base del espacio de funciones. Para ello deben satisfacer además la condición de completitud

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^*(x) f_n(x') = \delta(x - x')$$

a) Use la completitud y la ortogonalidad de las funciones de la base para mostrar que una función cualquiera $\Phi(x)$ puede desarrollarse como

$$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n(x) \qquad \text{con} \qquad c_n = \int_a^b f_n^*(x) \Phi(x) dx$$

b) Considere $B = \left\{ f_n(x) = e^{i2\pi n x} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ con $x \in [0, 1]$. Muestre que en ese intervalo las funciones de B son ortonormales.

c) Considere la función $\Phi(x) = x$, halle los coeficientes c_n de su desarrollo en el intervalo $[0, 1]$:

$$\Phi_M(x) = \sum_{n=-M}^{M} c_n e^{i2\pi n x}.$$

Con la ayuda de algún graficador, trace las gráficas de $\Phi_M(x)$ para los casos $M = 1, 2, 10$ y 100.