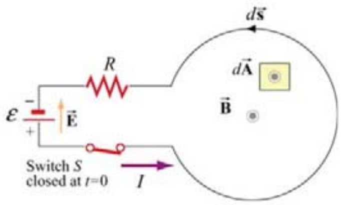
2. Circuitos RL (transitorios)

Si tenemos un flujo de campo magnético variable en el tiempo, entonces, según la ley de Faraday, la integral en un camino cerrado ya no es cero, como indicaba la ley de Kirchhoff, sino igual al flujo de campo magnético a través de la superficie abierta delimitada por la curva cerrada:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

Veamos entonces, cuál es la consecuencia de tener inductores como parte de circuitos y corrientes que varían con el tiempo.
Consideremos el siguiente circuito: una espira circular, alimentada por una fuente de tensión con fem ε y resistencia R. Lo podríamos representar gráficamente como sigue. Al circular corriente por el circuito se induce un campo magnético (indicado en la figura), perpendicular al plano de la espira.



Si esa corriente fuera constante en el tiempo, el flujo de campo magnético que atraviesa la espira sería constante en el tiempo y entonces:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\varepsilon + IR \quad = 0$$

Pero, si el circuito está inicialmente abierto (abierta la llave S) y en t=0 cierro la llave, la corriente comenzará a aumentar hasta llegar a un valor estacionario y en ese lapso, la corriente varía en el tiempo y por lo tanto **B** varía en el tiempo y el flujo de campo magnético (Φ_B) también varía en el tiempo. Cómo Φ_B es proporcional a I (Φ_B =LI) y L sólo depende de condiciones geométricas del inductor, la ecuación de Faraday queda:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\varepsilon + IR = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

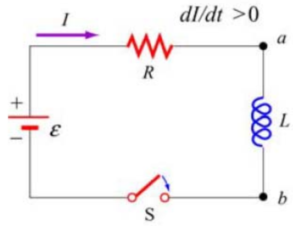
Qué podríamos re-escribir de esta manera:

$$\Delta V = \varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

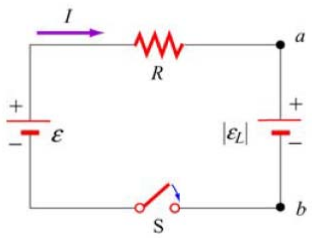
Cuya expresión nos recuerda a la ley de Kirchhoff, pero para llegar a esta expresión hemos asignado una "diferencia de potencial" en los extremos del inductor.
Usando esta regla de Kirchhoff modificada, es posible plantear las ecuaciones correctas para circuitos que tienen inductores, sin embargo, hay que tener en cuenta que el último término proviene del lado derecho de la ecuación de Faraday.

Corriente creciente

Consideremos el siguiente circuito RL y que en t=0, la llave S se cierra.



La corriente comienza a aumentar induciendo un flujo de campo magnético creciente en el inductor, el cual según la ley de Lenz se opondrá al cambio generando una corriente opuesta, con lo cual la corriente aumentará a un ritmo menor que si no hubiera inductor. Lo podriamos pensar como si hubiera una fem autoinducida que se opone a la de la fuente de tensión:



Usando la ecuación de Kirchhoff modificada, matemáticamente lo podemos escribir así:

$$\varepsilon - IR - |\varepsilon_L| = \varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

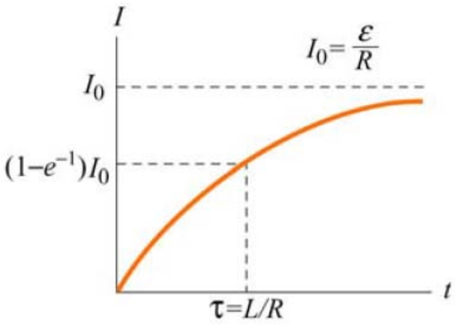
ó la podemos re-escribir así:

$$\frac{dI}{I-\varepsilon/R} = -\frac{dt}{L/R}$$

Integrando a ambos lados y teniendo en cuenta que I (t=0) = 0, encontramos la solución de la ecuación diferencial:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

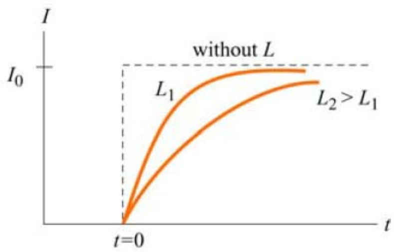
Dónde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo del circuito.
El comportamiento cualitativo de I como función del tiempo es el siguiente:



A tiempos suficientemente largos la corriente alcanza su valor de equilibrio ε/R (como si no hubiera inductor). τ es una medida de cuanto le cuesta alcanzar el equilibrio. Para mayores valores de L, más va a tardar el sistema en alcanzar el equilibrio.
La magnitud de la fem autoinducida:

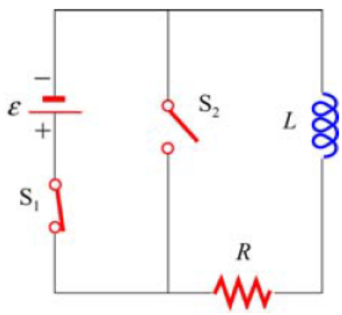
$$|\varepsilon_L| = \left| -L\frac{dI}{dt} \right| = \varepsilon e^{-t/\tau}$$

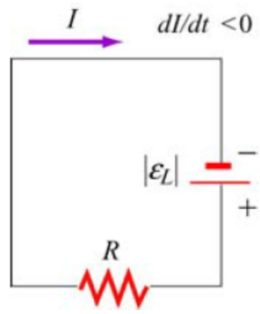
La cual tiene su máximo valor en t=0 y para tiempos suficientemente largos tiende a cero.



Corriente decreciente

Ahora consideremos el mismo circuito que en la sección anterior, pero supongamos que la llave ha estado cerrada mucho tiempo, de manera que la corriente alcanzo su valor de equilibrio I = ε/R y en t = 0 se abre S1 y se cierra S2 (figura siguiente).





La corriente comenzará a disminuir, el flujo de campo magnético también, y como dice Lenz se generará una corriente que se oponga a esa tendencia, lo cual podríamos pensar

como que se genera una fem autoinducida que genera una corriente en la misma dirección de la corriente original.
Planteando la ley de Kirchhoff modificada:

$$|\varepsilon_L| - IR = -L\frac{dI}{dt} - IR = 0$$

que puede re-escribirse así:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{L/R}$$

Integrando ambos lados y teniendo en cuenta que en t=0, I=ε/R obtenemos la solución:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/\tau}$$

Dónde τ = L/R es la constante de tiempo del circuito.