7- Inversas a Izquierda y Derecha

Sea $F : V \to V'$ una transformación lineal. $G : V' \to V$ lineal se denomina inversa a izquierda de F si

$$GF = I_V$$

donde $I_V : V \to V$ denota el operador identidad en V. En tal caso F es la inversa a derecha de G.

Teorema: Una transformación lineal posee inversa a izquierda si y sólo si es un monomorfismo, e inversa a derecha si y sólo si es un epimorfismo.
(Recordar esquema gráfico hecho en clase).
Dem.: a) Si F es un monomorfismo $\Rightarrow \forall\, v' \in I(F)\ \exists$ un y sólo un $v \in V$ tal que $F(v) = v'$. Podemos escribir en general $V' = I(F) \oplus Q$, donde Q es un suplemento de $I(F)$. Todo vector $v' \in V'$ puede pues escribirse en forma *única* como $v' = v'_1 + v'_2$, donde $v'_1 = F(v_1) \in I(F)$ y $v'_2 \in Q$. Definimos entonces $G : V' \to V$ como

$$G(v') = v_1$$

De esta forma, $G(v'_1) = v_1$ y $G(v'_2) = 0$ si $v'_1 \in I(F)$ y $v'_2 \in Q$. Es fácil comprobar que G es lineal (pues $G(v' + u') = v_1 + u_1 = G(v') + G(u')$ si $v' = v_1 + v_2$ y $u' = u_1 + u_2$, y $G(\alpha v') = \alpha v_1 = \alpha G(v')$). Es además un epimorfismo y satisface $GF = I_V$.
Notemos que si $I(F) \neq V'$, la inversa a izquierda no es única, pues podemos sumar a G cualquier función lineal $H : V' \to V$ no nula que satisfaga $H(v') = 0$ si $v' \in I(F)$ (o sea, $I(F) \subset N(H)$) tal que $HF = 0$ y por lo tanto $(G + H)F = GF$.
Además, si F no es monomorfismo, $\exists\ v \in V$, con $v \neq 0$, tal que $F(v) = 0$ y por lo tanto, $(GF)(v) = G(F(v)) = G(0) = 0 \neq v$, por lo que F no puede tener inversa a izquierda en tal caso.

b) Si $G : V' \to V$ es un epimorfismo, sea $N(G)$ su espacio nulo y sea Q un suplemento tal que $V' = N(G) \oplus Q$. G restringido a Q ($G : Q \to V$) es un isomorfismo, ya que sigue siendo epimorfismo y además, si $v' \in Q$ y $v' \neq 0$, $G(v') \neq 0$. Definamos $F : V \to V'$ tal que $F(v)$ es el único vector v' de Q que satisface $G(v') = v$ ($I(F) = Q$). Es fácil ver que F es lineal, es monomorfismo y satisface $GF = I_V$.
No obstante, la inversa a derecha no es única si $N(G) \neq \{0\}$, pues podemos sumar a F cualquier función no nula $H : V \to V'$ con $I(H) \subset N(G)$, tal que $GH = 0$.
Además, si G no es epimorfismo, $\exists\, v \in V$ tal que v no pertence a $I(G)$ y por lo tanto $(GF)(v) = G(F(v)) \neq v$, pues $G(F(v)) \in I(G)$. No puede pues existir inversa a derecha en este caso.

Si V es de dimensión n y V' de dimensión m, las matrices que representan a F y G en bases ordenadas B, B' de V y V' satisfacen

$$[G]_B^{B'}[F]_{B'}^{B} = I_n$$

con I_n la identidad de $n \times n$, $[F]_{B'}^{B}$ de $m \times n$ y $[G]_B^{B'}$ de $n \times m$. La matriz $[G]_B^{B'}$ se dice que es inversa a izquierda de la matriz $[F]_{B'}^{B}$, y $[F]_{B'}^{B}$ la matriz inversa a derecha de $[G]_B^{B'}$. Si F posee una inversa a izquierda G y a derecha H debe ser entonces un isomorfismo, con $m = n$ en el caso de dimensión finita. En tal caso $G = H$, ya que $G = GI_{V'} = G(FH) = (GF)H = I_V H = H$.

Este teorema implica que una matriz A de $m \times n$ (m filas, n columnas) **tiene inversa a izquierda** B ($BA = I_n$, con B de $n \times m$) **si y sólo si Rango** $(A) = n$ (y por lo tanto $m \geq n$), en cuyo caso A representa a un **monomorfismo**. Y una matrix B de $m \times n$ tiene **inversa a derecha** A ($BA = I_m$, con A de $n \times m$) **si y sólo si Rango** $(B) = m$ (y por lo tanto $m \leq n$), en cuyo caso representa un epimorfismo.
Si una matriz posee inversa izquierda y a derecha entonces debe ser necesariamente cuadrada y representar un isomorfismo, siendo pues no singular. En tal caso la inversa a izquierda y a derecha coinciden.

Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tiene rango n (lo que implica $m \geq n$) sus columnas son LI. Es fácil mostrar que $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ **tiene rango** n **si y sólo si la matriz** $A^\dagger A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **es no singular (**$\text{Det}(A^\dagger A) \neq 0$**)**. Recordemos que $A^\dagger = (A^t)^*$, es decir, $A^\dagger_{ij} = A^*_{ji}\ \forall\, i, j$.
Dem.: Si las columnas son independientes, la única solución de $AX = 0$ (con $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$) es $X = 0$ (en otras palabras, A representa a un monomorfismo y por lo tanto su espacio nulo es $\{0\}$). Si existe X tal que $A^\dagger AX = 0$ entonces $X^\dagger A^\dagger AX = (AX)^\dagger(AX) = |AX|^2 = 0$ y por lo tanto $AX = 0$. Esto implica entonces $X = 0$, por lo que $A^\dagger A$ es no singular: $\text{Det}(A^\dagger A) \neq 0$.

Análogamente, Si $A^\dagger A$, es no singular, la única solución de $A^\dagger AX = 0$ es $X = 0$, por lo que la única solución de $AX = 0$ es $X = 0$, indicando que las columnas de A son linealmente independientes, es decir, que A tiene rango n.
Esto permite pues construir en forma inmediata una inversa a izquierda B $\forall$ $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con rango n:

$$B = (A^\dagger A)^{-1}A^\dagger \qquad (1)$$

ya que $BA = I_n$ (notar que $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$).

Análogamente, si $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tiene rango m, B representa a un epimorfismo. En tal caso $B^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tiene rango m y por lo tanto $BB^\dagger$ es no singular. Una inversa a derecha de B es pues

$$A = B^\dagger(BB^\dagger)^{-1} \qquad (2)$$

ya que $BA = I_m$ (notar que $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$). Recordemos, no obstante, que si $m \neq n$, existen otras inversas a izquierda y a derecha respectivamente, aunque las inversas (1) y (2) poseen ciertas propiedades especiales que discutiremos más adelante. Por otro lado, si $m = n \Rightarrow B = A^{-1}$ en (1) y $A = B^{-1}$ en (2), como el lector puede fácilmente comprobar.

Ejemplo 1) Sea $D : P \to P$ la derivación considerada en el espacio vectorial P de todos los polinomios, de dimensión infinita. D no es un monomorfismo, pues $D(1) = 0$ (la derivada de cualquier polinomio de grado 0 es el polinomio nulo), por lo que $N(D) = \overline{\{1\}}$, pero sí es un epimorfismo, pues $\forall q(t) \in P \;\exists\; p(t) \in P$ tal que $D(p(t)) = q(t)$ (Por ejemplo, $p(t) = \int_0^t q(t')dt'$, que es un polinomio).
Por lo tanto, D tendrá inversa a derecha. Una inversa es precisamente la integración $S : P \to P$ definida por $S(q(t)) = \int_0^t q(t')dt'$, que es lineal y que satisface

$$DS = I_P$$

(I_P es la identidad en P). En efecto, $(DS)(t^n) = D(S(t^n)) = D(t^{n+1}/(n+1)) = t^n \;\forall\; n \geq 0$. No obstante, $SD \neq I_P$ pues $SD(1) = S(0) = 0 \neq 1$, o sea que S es inversa sólo a derecha de D.
S es un monomorfismo ($N(S) = \{0\}$), pero no un epimorfismo, ya que la imagen de S no contiene a los polinomios de grado 0.
Notemos también que S' definido por $S'(q(t)) = \int_a^t q(t')dt'$ es también una inversa a derecha de D para cualquier a real, y también lo es T dada por $T(q(t)) = \int_0^t q(t')dt' + cq(0)$, siendo c cualquier constante $\in K$.

Ejemplo 2) Sea $D : P_2 \to P_1$ la derivación restringida a P_2 (Polinomios de grado ≤ 2) con codominio P_1. Tenemos, en las bases $e = (1, t, t^2)$, $e' = (1, t)$ de P_2 y P_1 respectivamente,

$$[D]^e_{e'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ya que $D(e_1) = 0$, $D(e_2) = 1 = e'_1$, $D(e_3) = 2t = 2e'_2$. D así definido es claramente un epimorfismo, pues $I(D) = P_1$. Una inversa a derecha de D es la transformación $S : P_1 \to P_2$ definida como la integral $S(p(t)) = \int_0^t p(t')dt'$, con $S(e'_1) = t = e_2$, $S(e'_2) = t^2/2 = e_3/2$, representada por la matriz

$$[S]^{e'}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que S es un monomorfismo y que es una inversa a derecha de D, pues

$$[D]^e_{e'}[S]^{e'}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$DS = I_{P_1}$$

Precisamente, si $A = [S]^{e'}_e \Rightarrow$ la ec. (1) nos da $B = [D]^e_{e'}$. Y si $B = [D]^e_{e'}$, la ec. (2) nos da $A = [S]^{e'}_e$, como el lector puede fácilmente verificar.

No obstante, notemos que $[S]_e^{e'}[D]_{e'}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3$, por lo que $SD \neq I_{P_2}$.

Notemos también que $S' : P_1 \to P_2$ definida por $S'(e_1) = t + a$, $S'(e_2) = t^2/2 + b$, y representada por

$$[S']_e^{e'} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

es *también* inversa a derecha de $[D]_{e'}^e$ $\forall\, a, b$, como puede verificarse fácilmente, y que

$$[D']_{e'}^e = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ d & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es también una inversa a izquierda de $[S]_e^{e'}$ $\forall\, c, d$, de modo que éstas no son únicas.

8- Solución general de una ecuación lineal

Como aplicación fundamental, consideremos, para $F : V \to V'$ lineal, la ecuación general

$$F(v) = v'$$

donde se trata de encontrar el conjunto de vectores $v \in V$ que satisfacen $F(v) = v'$.
Si $v' = 0$, la ecuación se denomina homogénea y el conjunto de soluciones es el espacio nulo $N(F)$.
Si $v' \neq 0$, la ecuación se denomina no homogénea. En tal caso el conjunto de soluciones de la ecuación no homogénea *no es un espacio vectorial* (por ej. 0 no pertenece al conjunto pues $F(0) = 0 \neq v'$). Se cumple en cambio que si $F(v_1) = v_1'$ y $F(v_2) = v_2' \Rightarrow$

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2'$$

o sea, la combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ es solución de la ecuación $F(v) = \alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2'$.

Es obvio además que existirá solución si y sólo si $v' \in I(F)$.
Supongamos ahora que existan dos soluciones v_1, v_2, tal que $F(v_1) = F(v_2) = v'$. Entonces

$$0 = F(v_1) - F(v_2) = F(v_1 - v_2)$$

por lo que $v_2 - v_1 \in N(F)$. Por lo tanto, $v_2 = v_1 + v_n$, donde $v_n \in N(F)$. Es decir, si v_p es una solución particular que satisface $F(v_p) = v' \Rightarrow$ cualquier otra solución v es de la forma

$$v = v_p + v_n$$

donde $v_n \in N(F)$ es un vector del espacio nulo de F, es decir, una solución de la ec. *homogénea* ($F(v_n) = 0$).
La solución *general* estará dada entonces por la suma de una solución particular v_p de la ecuación no homogénea y de una solución v_n de la ecuación homogénea.

Resulta claro entonces que si $v' \in I(F)$, la solución será única si y sólo si $N(F) = 0$, o sea, si y sólo si F es un monomorfismo. En tal caso, la única solución de $F(v) = v'$ puede encontrarse como

$$v = G(v')$$

donde G *es una inversa a izquierda de* F. En efecto, si $F(v) = v' \Rightarrow G(F(v)) = (GF)(v) = I_V(v) = v = G(v')$. Puede utilizarse cualquier inversa a izquierda ya que difieren entre sí sólo para vectores que no pertenecen a $I(F)$ ($G_2(v') = G_1(v')$ si $v' \in I(F)$).

Por otro lado, si $F : V \to V'$ es un epimorfismo $\Rightarrow$ la ecuación $F(v) = v'$ tendrá siempre solución, pero no será única a no ser que $N(F) = \{0\}$ (en cuyo caso F es isomorfismo). La solución general será

$$v = G(v') + v_n$$

donde G es una inversa a derecha de F y v_n un vector arbitrario de $N(F)$. En efecto, $F(G(v')+v_n) = F(G(v'))+F(v_n) = (FG)(v')+0 = I_{V'}(v') = v'$. Aquí $G(v')$ representa la solución particular v_p, la cual, remarquemos, *es una función lineal* de v'. Puede utilizarse cualquier inversa a derecha pues estas difieren sólo en un vector de v_n ($G_2(v') = G_1(v')+v_n$ con $v_n \in N(F)$).

Finalmente, si F es un isomorfismo, existe una única solución $\forall\, v' \in V'$ dada por

$$v = F^{-1}(v')$$

con F^{-1} la (única) inversa de F, que es a la vez inversa a izquierda y derecha.

Ejemplo 1): Para el caso de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas, dados por

$$AX = Y$$

con A de $m \times n$, X de $n \times 1$, Y de $m \times 1$ y A y Y de elementos reales (que corresponde a la función $F : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ dada por $F(X) = AX$) los resultados anteriores implican que:
1) El sistema posee solución si y sólo si Y pertenece al espacio columna de A.
En tal caso, la solución general será de la forma

$$X = X_p + X_n$$

donde X_p es una solución particular ($AX_p = Y$) y X_n una solución general del sistema homogéneo ($AX_n = 0$, con 0 el vector columna nulo).

2) La solución será única si y sólo si el espacio nulo de A es el vector columna nulo ($X_n = 0$), es decir, si y sólo si Rango $(A) = n$ (y por lo tanto, $m \geq n$). En este caso F es un monomorfismo y la única solución (en el caso que Y pertenezca al espacio columna de A) puede encontrarse como $X = BY$, con B de $n \times m$ una inversa a izquierda de A ($BA = I_n$).

3) Si la dimensión del espacio columna es m (en cuyo caso Rango $(A) = m$ y por lo tanto, $m \leq n$) existirá solución para cualquier Y de $m \times 1$. En este caso F es un epimorfismo y la solución general puede escribirse como $X = CY + X_n$, con C de $n \times m$ una inversa a derecha de A ($AC = I_m$) y X_n solución del sistema homogéneo $AX_n = 0$.

4) Si $m = n$ y Rango $(A) = n \Rightarrow$ existe siempre una única solución dada por $X = A^{-1}Y$, con A^{-1} la inversa de A. En este caso F representa un isomorfismo.

Ejemplo 2): Resolver el sistema $x + y = a$, $4x + 2z = b$, en forma matricial. Corresponde a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Como el rango de la matriz es 2, existirá solución $\forall\, a, b$. Reduciendo por filas el sistema ampliado y llevándolo a la forma de Gauss-Jordan, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 4 & 0 & 2 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}b \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & a - \frac{1}{4}b \end{array}\right)$$

de donde se lee la solución general $x = b/4 - z/2$, $y = a - b/4 + z/2$, con z libre. Podemos escrbir esta solución como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$ arbitrario (parámetro libre), donde $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es precisamente *una inversa a derecha de la matriz de coeficientes* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $X = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ un elemento arbitrario del espacio nulo de A

$(AX=0)$. Nótese que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pero

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anexo: Operadores de Proyección:

Recordemos que si S_1 es un subespacio de V y S_2 un suplemento tal que $V = S_1 \oplus S_2$, todo vector $v \in V$ puede escribirse en forma única como $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$.
El proyector P_{S_1/S_2} sobre S_1 en la dirección de S_2 (recordar la interpretación geométrica dada en clase) queda entonces definido por

$$P_{S_1/S_2}(v) = v_1$$

y satisface por lo tanto $P^2_{S_1/S_2} = P_{S_1/S_2}$, pues $P^2_{S_1/S_2}(v) = P_{S_1/S_2}(P_{S_1/S_2}(v)) = P_{S_1/S_2}(v_1) = v_1$. Obviamente, su núcleo e imagen son $N(P_{S_1/S_2}) = S_2$, $I(P_{S_1/S_2}) = S_1$. Depende de S_1 y S_2.

Análogamente, si $P^2 = P$, P es un proyector sobre $S_1 = I(P)$ en la dirección de $S_2 = N(P)$, con $S_1 \oplus S_2 = V$, es decir $P = P_{I(P)/N(P)}$.
En efecto, para cualquier $v \in V$, $v = P(v) + v - P(v) = v_1 + v_2$, con $v_1 = P(v) \in I(P)$ y $v_2 = v - P(v) \in N(P)$ pues $P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$. Además $I(P) \cap N(P) = \{0\}$ pues si $v = P(v')$ y $P(v) = 0 \Rightarrow 0 = P^2(v') = P(v') = v$. Por lo tanto $V = I(P) \oplus N(P)$.
Finalmente $P(v) = P(v_1 + v_2) = P(v_1) + P(v_2) = P^2(v) + 0 = P(v) = v_1$, por lo que P es proyector sobre $S_1 = I(P)$ en la dirección de $S_2 = N(P)$. Esto incluye los casos triviales $I(P) = V$, en cuyo caso $N(P) = \{0\}$ y por lo tanto $P_{S_1/S_2} = I_V$ (operador identidad), y $I(P) = \{0\}$, en cuyo caso $N(P) = V$ y $P = 0$ (operador nulo). Dado que $v = v_1 + v_2 = P_{S_1/S_2}(v) + P_{S_2/S_1}(v)$, se cumple siempre

$$P_{S_1/S_2} + P_{S_2/S_1} = I_V$$

Si $\dim V = n$, la representación matricial de P_{S_1/S_2} en una base ordenada $B = (b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$, en la que $(b_1, \ldots, b_k)$ es base de S_1 y $(b_{k+1}, \ldots, b_n)$ es base de S_2, es de la forma

$$[P_{S_1/S_2}]^B_B = \begin{pmatrix} I_{k\times k} & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}$$

donde $I_{k\times k}$ denota la matriz identidad de $k \times k$, $m = n - k$ y 0_{pq} la matriz nula de $p \times q$. Es claro que P_{S_1/S_2} es un operador singular ($\mathrm{Det}[P_{S_1/S_2}] = 0$), salvo en el caso $S_1 = V$ ($S_2 = \{0\}$, $P = I_V$).

Los proyectores ortogonales son aquellos en los que S_2 es el subespacio ortogonal a S_1, tema que veremos en detalle más adelante. En general, S_2 puede ser cualquier suplemento de S_1, no necesariamente el ortogonal, por lo que la matriz que representa a P_{S_1/S_2} puede no ser simétrica o hermítica en una base ortonormal.

Ej.: Consideremos, para $V = \mathbb{R}^2$, el proyector sobre el subespacio generado por $b_1 = (1, 0)$ en la dirección del subespacio generado por $b_2 = (1, 1)$. Como $P(b_1) = b_1$, $P(b_2) = 0$, en la base $b = \{b_1, b_2\}$ se obtiene

$$[P_{S_1/S_2}]^b_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la base canónica $e = (e_1, e_2)$, con $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, se obtiene entonces

$$[P_{S_1/S_2}]^e_e = S[P_{S_1/S_2}]^b_b S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $S = [I]^b_e = \binom{1\,1}{0\,1}$ y $S^{-1} = \binom{1\,-1}{0\;\;1} = [I]^e_b$. Las columnas de $[P_{S_1/S_2}]^e_e$ son proporcionales a $[b_1]^e_e = \binom{1}{0}$.
Para $v = (x, y)$ obtenemos entonces $[P_{S_1/S_2}(v)]_e = [P_{S_1/S_2}]^e_e\binom{x}{y} = \binom{x-y}{0}$, es decir, $P_{S_1/S_2}(x, y) = (x - y, 0)$ en acuerdo con $(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$ (Recordar dibujo).
El proyector ortogonal usual sobre el subespacio S_1 generado por $e_1 = b_1$ es $P_{S_1} \equiv P_{S_1/S_1^\perp}$, donde $S_1^\perp$ es el subespacio ortogonal, generado por ej. por e_2. Obtenemos $[P_{S_1}]^e_e = \binom{1\,0}{0\,0}$ y por lo tanto $P(x, y) = (x, 0)$, de acuerdo a $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.