27 Tensores (Resumen)

27. 1 Notación tensorial

Mediante la convención de Einstein para sumas, el cambio de base $e'_i = \sum_{j=1}^n S_{ji} e_j$, con $S = [I]_e^{e'}$ una matriz de $n \times n$ no singular, se escribe

$$e'_i = S_i^j e_j$$

donde $S_i^j e_j \equiv \sum_{j=1}^n S_i^j e_j$ y n es la dimensión del espacio. El índice superior en S denota fila y el inferior columna. En forma matricial, la relación anterior equivale pues a

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) S$$

Por otro lado, la transformación $x'^i = \sum_{j=1}^n S_{ij}^{-1} x^j$ de las componentes de un vector $v = \sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{i=1}^n x'^i e'_i$, se escribe en la forma

$$x'^i = R_j^i x^j, \quad R = S^{-1}$$

donde $R_j^i x^j \equiv \sum_{j=1}^n R_j^i x^j$. En forma matricial, la relación previa equivale pues a

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \ldots \\ x'^n \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x^1 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix}$$

lo que está también de acuerdo con el supraíndice como índice de fila. Notemos que

$$R_j^i S_k^j = S_j^i R_k^j = \delta_k^i$$

que es la expresión tensorial de la relación matricial $RS = SR = I$. El vector v se escribe entonces como

$$v = x^i e_i = x'^i e'_i$$

Como verificación, reemplazando $x'^i = R_j^i x^j$, $e'_i = S_i^k e_k$, se tiene $x'^i e'_i = R_j^i S_i^k x^j e_k = \delta_j^k x^j e_k = x^j e_j$.

En general, n componentes a_i que se transforman como

$$a'_i = S_i^j a_j$$

se denominan *covariantes*, mientras que n componentes b^i que se transforman como

$$b'^i = R_j^i b^j$$

con $R_j^i S_k^j = \delta_k^i$ (o sea, $R = S^{-1}$) se denominan *contravariantes*. En tal caso, el producto

$$b'^i a'_i = b^i a_i$$

(donde la suma sobre i está implícita) permanece invariante frente a cambios de base.

Notemos finalmente que las relaciones inversas están dadas por

$$a_i = R_i^j a'_j, \quad b^i = S_j^i b'^j$$

Transformación de las derivadas parciales:
Dado el cambio de variables lineal $x'^i = R_j^i x^j$ y su relación inversa $x^j = S_i^j x'^i$, con $S = R^{-1}$, y R, S *independientes de las coordenadas*, tenemos

$$S_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \quad R_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$$

En virtud de la regla de la cadena, se obtiene entonces

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

o sea, en notación covariante,

$$\partial'_i = S_i^j \partial_j$$

donde $\partial'_i \equiv \frac{\partial}{\partial x'^i}$, $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}$. Las derivadas respecto de componentes contravariantes se transforman pues de manera covariante.

27.2 Transformación de vectores del dual

Dada una base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de V, los elementos de la base dual $f = (f^1, \ldots, f^n)$ del espacio dual V^* (el conjunto de formas lineales de V en K) quedan definidos por

$$(f^i, e_j) = \delta^i_j$$

(utilizamos la notación $f^i(v) = (f^i, v)$. Esto implica la ley de transformación contravariante

$$f'^i = R^i_j f^j$$

de forma que

$$(f'^i, e'_j) = R^i_k S^l_j (f^k, e_l) = R^i_k S^l_j \delta^k_l = R^i_l S^l_j = \delta^i_j$$

donde $e'_j = S^i_j e_i$. Un elemento arbitrario $h \in V^*$ puede entonces ser escrito como

$$h = a_i f^i = a'_i f'^i$$

donde

$$a'_i = S^j_i a_j$$

Notemos que si $v = x^i e_i$, $h = a_i f^i$,

$$a_i = (h, e_i), \quad x^i = (f^i, v)$$

Finalmente, mencionemos que si $(e_1, \ldots, e_n)$, $(f'^1, \ldots, f'^n)$ son bases arbitrarias de V y V^* respect., con

$$R^i_j = (f'^i, e_j)$$

una matriz no singular, la base dual de V asociada a la base f' de V^* está dada por

$$e'_i = S^j_i e_j$$

con $S = R^{-1}$, ya que $(f'^k, e'_i) = (f'^k, e_j) S^j_i = R^k_j S^j_i = \delta^k_i$. Análogamente, la base dual de V^* asociada a la base e de V está formada por

$$f^i = S^i_j f'^j$$

ya que $(f^i, e_k) = S^i_j (f'^j, e_k) = S^i_j R^j_k = \delta^i_k$.
Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^2$ y sean (f'^1, f'^2) las formas lineales definidas por
$f'^1(x, y) = 2x - y$, $f'^2(x, y) = 3x + y$
donde hemos escrito $v = (x, y) = xe_1 + ye_2$, con (e_1, e_2) la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
Hallar la base dual de V asociada a f'^1, f'^2.
Podemos escribir $f'^i = R^i_k f^k$, con $R = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y (f^1, f^2) la base dual asociada a (e_1, e_2) ($f^1(x, y) = x$, $f^2(x, y) = y$).
Es claro que (f'^1, f'^2) es base de V^* pues $|R| = 5 \neq 0$. La base dual asociada de V está entonces dada por $e'_i = S^j_i e_j$, con $S = R^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)/5$:

$$e'_1 = \frac{1}{5}(e_1 - 3e_2), \; e'_2 = \frac{1}{5}(e_1 + 2e_1)$$

verificándose que $f'^1(e'_1) = f'^2(e'_2) = 1$, $f'^1(e'_2) = f'^2(e'_1) = 0$.

27.3 Tensor métrico

Dado un espacio euclideo V de dimensión finita, con el producto escalar denotado por (v, w), y dada una base arbitraria $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de V, el tensor métrico se define como

$$g_{ij} = (e_i, e_j)$$

Es una matriz simétrica ($g_{ij} = g_{ji}$) no singular ($|g| \neq 0$). En tal caso, la norma al cuadrado de un vector $v = x^i e_i$ (es decir, la distancia al cuadrado del extremo del vector al origen) está dada por

$$||v||^2 = (x^i e_i, x^j e_j) = x^i (e_i, e_j) x^j = x^i g_{ij} x^j$$

Podemos escribir lo anterior también en la forma

$$||v||^2 = x^i x_i, \quad x_i \equiv g_{ij} x^j$$

Frente a un cambio de base, el tensor métrico se transforma como

$$g'_{ij} = (e'_i, e'_j) = S_i^k S_j^l (e_k, e_l) = S_i^k S_j^l g_{kl}$$

que corresponde a un tensor de rango $(2,0)$ (dos veces covariante), como se verá en breve.
Las componentes x_i se transforman pues en forma covariante:

$$x'_i = g'_{ij} x'^j = S_i^k S_j^l R_m^j g_{kl} x^m = S_i^k g_{kl} x^l = S_i^k x_k$$

En espacios euclideos V de dimensión finita, podemos identificar con cada elemento h del dual V^* uno y sólo un vector $w_h \in V$ tal que

$$(h, v) = (w_h, v)$$

$\forall\ v \in V$, donde el segundo paréntesis denota producto escalar: Si $h = a_i f^i$ y $w_h = a^i e_i$, con $(f^i, e_j) = \delta_j^i$,

$$(h, e_j) = a_j = (w_h, e_j) = a^i (e_i, e_j) = a^i g_{ij}$$

de modo que $a^i g_{ij} = a_j$. Por lo tanto,

$$a^i = g^{ji} a_j$$

donde g^{ij} denota los elementos de la *matriz inversa* de la matriz de elementos g_{ij}:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

En lo sucesivo denotaremos a w_h directamente como h. Por consiguiente, podemos escribir los elementos de la base dual como combinación lineal de los e_i. En notación tensorial,

$$f^i = g^{ik} e_k$$

con

$$(f^i, e_j) = g^{ik} (e_k, e_j) = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

Notemos también que

$$(f^i, f^j) = g^{jk} (f^i, e_k) = g^{ji}$$

por lo que g^{ji} es el tensor métrico en la base dual. Un vector v puede pues escribirse en las formas

$$v = x^i e_i = x_i f^i$$

donde $x_i = g_{ij} x^j$, $f^i = g^{ik} e_k$, ya que $x_i f^i = g^{ik} g_{ij} x^j e_k = \delta_j^k x^j e_k = x^j e_j$. Para el producto escalar de dos vectores $v = x^i e_i$, $w = y^j e_j$ se tienen pues las expresiones

$$(v, w) = x^i g_{ij} y^j = x^i y_i = x_i y^i = x_i g^{ij} y_j$$

27.4 Tensores

Un tensor general de p índices covariantes y q indices contravariantes (que denotaremos aquí como tensor $\binom{q}{p}$) en un espacio de dimensión n, es un conjunto de n^{p+q} números $T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ dependientes de una base ordenada $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de un espacio vectorial V, que se transforman frente a cambios de base $e'_i = S_i^j e_j$ en la forma

$$T'^{j'_1 \ldots j'_q}_{i'_1 \ldots i'_p} = S_{i'_1}^{i_1} \ldots S_{i'_p}^{i_p} R_{j_1}^{j'_1} \ldots R_{j_q}^{j'_q} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$$

con $R = S^{-1}$. Por ejemplo, para un tensor $\binom{1}{1}$, $T'^l_k = R_j^l S_k^i T_i^j$, que involucra una suma sobre i y j.

Una posible realización de un tensor $\binom{q}{p}$ es una forma *multilineal* $T : V^p \times (V^*)^q \to K$ de p vectores de V y q vectores del espacio dual V^* (una función es multilineal si es lineal en cada uno de sus argumentos:

$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_1' v_1', v_2, \ldots, v_p, w^1, \ldots, w^q) = \alpha_1 T(v_1, v_2, \ldots, v_p, w^1, \ldots, w^q) + \alpha_1' T(v_1', v_2, \ldots, v_p, w^1, \ldots, w^q)$, y similar para los restantes argumentos). En tal caso, si $v_i = x_i^j e_j$ y $w^i = a_j^i f^j$,

$$T(v_1, \ldots, v_p, w^1, \ldots, w^q) = x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p} a_{j_1}^1 \ldots a_{j_q}^q T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, f^{j_1}, \ldots, f^{j_q})$$

Si los f^i son los vectores de la base dual ($(f^i, e_j) = \delta_j^i$), los elementos

$$T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \equiv T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, f^{j_1}, \ldots, f^{j_q})$$

se transforman como un tensor $\binom{q}{p}$ frente a cambios de base: Si $e_i' = S_i^j e_j$, entonces $f'^i = R_j^i f^j$ y

$$\begin{aligned} T'^{j_1' \ldots j_q'}_{i_1' \ldots i_p'} &= T(e_{i_1'}', \ldots, e_{i_p'}', f'^{j_1'}, \ldots, f'^{j_q'}) = T(S_{i_1'}^{i_1} e_{i_1}, \ldots, S_{i_p'}^{i_p} e_{i_p}, R_{j_1}^{j_1'} f^{j_1}, \ldots, R_{j_q}^{j_q'} f^{j_q}) \\ &= S_{i_1'}^{i_1} \ldots S_{i_p'}^{i_p} R_{j_1}^{j_1'} \ldots R_{j_q}^{j_q'} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \end{aligned}$$

Otra posibilidad es considerar a $T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ como las coordenadas de un vector T perteneciente al **producto tensorial** de espacios $\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{\text{q veces}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{\text{p veces}}$ en una base $B = \{e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_p}\}$, donde nuevamente $(f^i, e_j) = \delta_j^i$:

$$T = T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \otimes f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_p}$$

Si $e_i = R_i^j e_j'$ y $f^i = S_j^i f'^j$ (tal que $e_i' = S_i^j e_j$, $f'^i = R_j^i f^j$, con $R = S^{-1}$), tenemos

$$\begin{aligned} T &= T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} R_{j_1}^{j_1'} \ldots R_{j_q}^{j_q'} S_{i_1'}^{i_1} \ldots S_{i_p'}^{i_p} e_{j_1'}' \otimes \ldots \otimes e_{j_q'}' \otimes f'^{i_1'} \otimes \ldots \otimes f'^{i_p'} \\ &= T'^{j_1' \ldots j_q'}_{i_1' \ldots i_p'} e_{j_1'}' \otimes \ldots \otimes e_{j_q'}' \otimes f'^{i_1'} \otimes \ldots \otimes f'^{i_p'} \end{aligned}$$

por lo que

$$T'^{j_1' \ldots j_q'}_{i_1' \ldots i_p'} = S_{i_1'}^{i_1} \ldots S_{i_p'}^{i_p} R_{j_1}^{j_1'} \ldots R_{j_q}^{j_q'} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$$

Un tensor $\binom{0}{0}$ es un *escalar*. Permanece invariante frente a cambios de base:

$$T' = T$$

Un tensor $\binom{1}{0}$ representa el conjunto de coordenadas *contravariantes* de un vector. Se transforman como

$$T'^i = R_j^i T^j$$

En forma matricial esto corresponde a $T' = RT$, con T un vector columna.
Por ejemplo, las coordendas x^i de un vector $v = x^i e_i \in V$ se transforman como $x'^i = R_j^i x^j$.

Un tensor $\binom{0}{1}$ representa el conjunto de coordenadas *covariantes* de un vector. Se transforman como

$$T_i' = S_i^j T_j$$

En forma matricial esto corresponde a $T' = TS$, con T un vector fila.
Por ejemplo, las coordenadas a_i de un vector $h = a_i f^i \in V^*$ se transforman como $a_i' = S_i^j a_j$.

Un tensor $\binom{1}{1}$ se transforma como

$$T_i'^j = R_l^j S_i^k T_k^l$$

En forma matricial, esto corresponde a $T_i^j = (RTS)_i^j$, es decir, $T' = RTS$, con $R = S^{-1}$. Un ejemplo son pues las matrices que representan operadores lineales $F : V \to V$. Estos pueden expresarse como $F = F_i^j e_j f^i$, de forma que $F(e_k) = F_i^j e_j (f^i, e_k) = F_k^j e_j$, siendo $F_i^j = [F(e_i)]^j = ([F]_e^e)_i^j$ la matriz que lo representa en la base e. Recordemos que esta matriz se transforma precisamente como $F' = RFS$ con $R = S^{-1}$, o sea, $F_i'^j = R_l^j S_i^k F_k^l$.

Un tensor $\binom{0}{2}$ se transforma como
$$T'_{ij} = S_i^k S_j^l T_{kl}$$

En forma matricial, esto equivale a $T_{ij} = (S^tTS)_{ij}$, es decir, $T' = S^tTS$. Un ejemplo son pues las matrices que representan formas cuadráticas (funciones de $V \times V \to K$), de elementos $A_{ij} = A(e_i, e_j)$, las que se transforman como $A' = S^tAS$, es decir, $A'_{ij} = S_i^k A_{kl} S_j^l$. En forma análoga se ve el caso de un tensor $\binom{2}{0}$ (funciones de $V^* \times V^*$ en K).

27.5 Producto Tensorial de Espacios Vectoriales. Recordemos aquí que el **producto tensorial** $V \otimes W$ de dos espacios vectoriales V, W sobre el mismo cuerpo K, de dimensiones n y m respectivamente, es el espacio generado por los productos $\{e_i \otimes \tilde{e}_j\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V y $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m\}$ una base de W. Se verifica, $\forall\, v \in V$, $w \in W$ y $\alpha \in K$,
$$\alpha(v \otimes w) = (\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w)$$
$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \quad v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_2 + v \otimes w_2$$
$$0 \otimes w = v \otimes 0 = 0$$
Si $u \in V \otimes W \Rightarrow$
$$u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, e_i \otimes \tilde{e}_j, \quad c_{ij} \in K$$
Destaquemos que esto incluye vectores producto $u = v \otimes w$, con $v \in V$ y $w \in W$, como así también vectores que son combinaciones lineales de productos pero que no pueden ser escritos como un único producto. La dimensión de $V \times W$ es $n \times m$ (y no $n + m$, como sucede con $V \times W$).

En mecánica cuántica, el espacio de estados de un sistema compuesto por dos subistemas distinguibles es justamente el producto tensorial de los espacios de estados de cada subsistema, siendo estos últimos espacios de Hilbert ($K = \mathbb{C}$). Para $e_i \otimes \tilde{e}_j$ se emplea la notación $|i\rangle \otimes |\tilde{j}\rangle$ o directamente $|i\rangle|\tilde{j}\rangle$ o $|i\tilde{j}\rangle$.
Los estados producto $|u\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle$ se denominan estados **separables**, mientras que los estados que no pueden ser escritos como producto se denominan correlacionados o **entrelazados**.

27.6 Producto y Suma de tensores
Sea T un tensor $\binom{q}{p}$ y U un tensor $\binom{q'}{p'}$ sobre el mismo espacio. Su producto es un tensor $\binom{p+p'}{q+q'}$ dado por
$$(TU)^{j_1 \ldots j_{q+q'}}_{i_1 \ldots i_{p+p'}} = T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}\, U^{j_{q+1} \ldots j_{q+q'}}_{i_{p+1} \ldots i_{p+p'}}$$

La suma está definida para tensores del mismo rango $\binom{p}{q}$: $(T + U)^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} + U^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$.

27.7 Producto tensorial de operadores. Si $F : V \to V$ y $G : W \to W$ son operadores lineales en espacios V, W, entonces $F \otimes G : V \otimes W \to V \otimes W$ es un operador lineal en el espacio producto tensorial $V \otimes W$, definido por
$$(F \otimes G)(v \otimes w) = F(v) \otimes G(w)$$
Si $F(v_i) = \lambda_i^F v_i$, $G(w_j) = \lambda^G w_j$, entonces
$$(F \otimes G)(v_i \otimes w_j) = \lambda_i^F \lambda_j^G v_i \otimes w_j$$
por lo que si F y G son diagonalizables, $(F \otimes G)$ también lo es, con $n \times m$ autovalores $\lambda_i^F \lambda_j^G$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Además, $\mathrm{Det}(F \otimes G) = \mathrm{Det}(F)^m \mathrm{Det}(G)^n$. Notemos finalmente que $(F \otimes G)^k = F^k \otimes G^k$, válido para $k \in \mathbb{N}$ y también $k \in \mathbb{Z}$ si F y G son invertibles.

Si $F = F^i_j e_i f^k$, $G = G^k_l \tilde{e}_k \tilde{f}^l$, $\Rightarrow$ $F \otimes G = F^i_j G^k_l (e_i \otimes \tilde{e}_k)(f^j \otimes \tilde{f}^l)$, por lo que $(F \otimes G)^{ik}_{jl} = F^i_k G^j_l$. Esto corresponde pues al producto tensorial de las matrices que representan a F y G, denominado también producto Kronecker: Ordenando la base en la forma $b = (e_i \otimes \tilde{e}_1, e_1 \otimes \tilde{e}_2, \ldots, e_n \otimes \tilde{e}_m)$, la matriz de $nm \times nm$ que representa a $F \otimes G$ en esta base es
$$[F \otimes G]_b = [F]_e \otimes [G]_{\tilde{e}} = \begin{pmatrix} F^1_1 [G]_{\tilde{e}} & \ldots & F^1_n [G]_{\tilde{e}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^n_1 [G]_{\tilde{e}} & \ldots & F^n_n [G]_{\tilde{e}} \end{pmatrix}$$

En notación de Mecánica Cuántica, $e_i \to |i\rangle$, $f^j \to \langle j|$ y $F \to \sum_{i,j} F_{ij} |i\rangle\langle j|$, $G = \sum_{k,l} G_{kl} |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{l}|$, con $F \otimes G = \sum_{i,j,k,l} F_{ij} G_{kl} |i\tilde{j}\rangle\langle k\tilde{l}|$.

27.8 Contracción de tensores

La contracción de un tensor $\binom{p}{q}$, con $p\geq 1$, $q\geq 1$, queda definida por una suma de la forma

$$T^{j_1\ldots k\ldots j_q}_{i_1\ldots\ldots k\ldots i_p}$$

(donde la suma es sobre el índice repetido k), la cual se transforma como un tensor $\binom{p-1}{q-1}$, pues $S^i_k R^k_j=\delta^i_j$. Por ejemplo, si

$$U^j_i = T^{kj}_{ik}$$

entonces

$$U'^{j'}_{i'} = T'^{k'j'}_{i'k'} = S^i_{i'}S^l_{k'}R^{k'}_k R^{j'}_j T^{kj}_{il} = S^i_{i'}\delta^l_k R^{j'}_j T^{kj}_{il} = S^i_{i'}R^{j'}_j T^{kj}_{ik} = S^i_{i'}R^{j'}_j U^j_i$$

donde hemos utilizado $S^l_{k'}R^{k'}_k=\delta^l_k$. Vemos pues que se transforma como un tensor $\binom{1}{1}$.

Así, dado un tensor T^{ij}_{kl} (tensor $\binom{2}{2}$) son posibles las 4 contracciones

$$T^{kj}_{ki}\ ,\ \ T^{jk}_{ik}\ ,\ \ T^{kj}_{ik}\ ,\ \ T^{jk}_{ki}$$

que originan 4 tensores $\binom{1}{1}$ (en general distintos). Por otro lado, las dos posibles contracciones dobles que dan lugar a un escalar (tensor $\binom{0}{0}$) son

$$T^{kj}_{kj}\ ,\ \ T^{jk}_{kj}$$

Por ejemplo, dado el tensor T^j_i, la única contracción posible es el escalar T^i_i. Este representa la *traza* de la matriz T:

$$\mathrm{Tr}\,T = T^i_i$$

Esta es, como hemos visto, invariante frente a cambios de base.

Dado el tensor producto $T^{jk}_{il}=F^j_iG^k_l$, el escalar $T^{jk}_{jk}=F^j_jG^k_k$ representa, matricialmente, el producto de trazas: $(\mathrm{Tr}F)(\mathrm{Tr}G)=F^i_iG^k_k$, mientras que el escalar $T^{jk}_{kj}=F^j_kG^k_j$ representa la traza del producto: $\mathrm{Tr}(FG)=F^j_kG^k_j$.

Además, la contracción $T^{jk}_{ki}=F^j_kG^k_i$ es un tensor $\binom{1}{1}$, que representa el producto matricial FG.

Un tensor es simétrico respecto a dos índices del mismo tipo si $T^{\ldots i\ldots j\ldots}_{\ldots}=T^{\ldots j\ldots i\ldots}_{\ldots}$, y es antisimétrico si $T^{\ldots i\ldots j\ldots}_{\ldots}=-T^{\ldots j\ldots i\ldots}_{\ldots}$ (Definición similar respecto de índices inferiores). Esta propiedad es independiente de la base: Por ejemplo, si $T^{ij}_{kl}=T^{ji}_{kl}$,

$$T'^{i'j'}_{k'l'} = R^{i'}_i R^{j'}_j S^k_{k'}S^j_{j'}T^{ij}_{kl} = R^{i'}_i R^{j'}_j S^k_{k'}S^j_{j'}T^{ji}_{kl} = T'^{j'i'}_{k'l'}$$

Un tensor es completamente simétrico (antisimétrico) si es simétrico (antisimétrico) respecto de todo par de índices del mismo tipo.

27.9 Determinante: Consideremos una forma multilineal completamente antisimétrica de $V^n\to K$. En tal caso, si $v_i=x^j_ie_j$,

$$F(v_1,\ldots,v_n)=x^{i_1}_1\ldots x^{i_n}_nF_{i_1,\ldots,i_n}$$

donde $F_{i_1,\ldots,i_n}=F(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})$. Se tiene $F_{\ldots,i,\ldots,j,\ldots}=-F_{\ldots,j,\ldots,i,\ldots}$ para cualquier par de índices i,j. Es claro entonces que $F_{\ldots,i,\ldots,j,\ldots}=0$ si $i=j$, es decir, si dos (o más) índices coinciden, y que si los índices son todos distintos, $F_{i_1,\ldots,i_n}=(-1)^{n_{i_1,\ldots,i_n}}F_{1,2\ldots,n}$, donde $n_{i_1,\ldots,i_n}$ es el número de permutaciones necesarias para llevar $(i_1,\ldots,i_n)$ al orden normal $(1,2,\ldots,n)$. Podemos pues escribir

$$F_{i_1,\ldots,i_n}=\lambda\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}$$

donde $\lambda=F_{1,2,\ldots,n}$ y $\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}$ es el símbolo completamente antisimétrico que satisface $\epsilon_{1,2,\ldots,n}=1$ (símbolo de Levi-Civita). Por lo tanto,

$$F(v_1,\ldots,v_n)=\lambda x^{i_1}_1\ldots x^{i_n}_n\epsilon_{i_1\ldots i_n}=\lambda\,\mathrm{Det}[X]$$

donde

$$\mathrm{Det}[X]=x^{i_1}_1\ldots x^{i_p}_n\epsilon_{i_1\ldots i_n}$$

es el determinante de la matriz de elementos x^i_j (la cual es una función multilineal completamente antisimétrica de las columnas de la matriz, que vale 1 para la matriz identidad). Por ejemplo, para $n = 2$, $\mathrm{Det}[X] = x^i_1 x^j_2 \epsilon_{ij} = x^1_1 x^2_2 \epsilon_{12} + x^2_1 x^1_2 \epsilon_{21} = x^1_1 x^2_2 - x^2_1 x^1_2$, mientras que para $n = 3$,
$\mathrm{Det}[X] = x^i_1 x^j_2 x^k_3 \epsilon_{ijk} = x^1_1 x^2_2 x^3_3 \epsilon_{123} + x^1_1 x^3_2 x^2_3 \epsilon_{132} + x^2_1 x^3_2 x^1_3 \epsilon_{231} + x^2_1 x^1_2 x^3_3 \epsilon_{213} + x^3_1 x^1_2 x^2_3 \epsilon_{312} + x^3_1 x^2_2 x^1_3 \epsilon_{321}$
$= x^1_1 x^2_2 x^3_3 - x^1_1 x^3_2 x^2_3 + x^2_1 x^3_2 x^1_3 - x^2_1 x^1_2 x^3_3 + x^3_1 x^1_2 x^2_3 - x^3_1 x^2_2 x^1_3$.
Notemos también que $x^i_1 x^j_2 \epsilon_{ij} = x^1_1 x^2_2 - x^2_1 x^1_2 = x^1_1 x^2_2 - x^1_2 x^2_1 = x^1_i x^2_j \epsilon^{ij}$, donde $\epsilon^{ij} = \epsilon_{ij}$, y en general, $\mathrm{Det}[X] = x^{j_1}_1 \ldots x^{j_n}_n \epsilon_{j_1 \ldots j_n} = \frac{1}{n!} x^{j_1}_{i_1} \ldots x^{j_n}_{i_n} \epsilon_{j_1 \ldots j_n} \epsilon^{i_1 \ldots i_n} = x^1_{i_1} \ldots x^n_{i_n} \epsilon^{i_1 \ldots i_n}$,
donde $\epsilon^{i_1 \ldots i_n} = \epsilon_{i_1 \ldots i_n}$.

Observemos que frente a un cambio de base general, $F_{i_1,\ldots,i_n} = F(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$ transforma como

$$F'_{i'_1 \ldots i'_n} = S^{i_1}_{i'_1} \ldots S^{i_n}_{i'_n} F_{i_1 \ldots i_n} = \lambda S^{i_1}_{i'_1} \ldots S^{i_n}_{i'_n} \epsilon_{i_1 \ldots i_n} = \lambda \mathrm{Det}(S) \epsilon_{i'_1 \ldots i'_n} = \mathrm{Det}(S) F_{i'_1,\ldots,i'_p}$$

Subida y bajada de índices y tensores cartesianos. En un espacio euclideo, es posible bajar o subir índices de un tensor mediante el tensor métrico$g_{ij} = (e_i, e_j)$, y su inversa $g^{ij} = (f^i, f^j)$, que son tensores simétricos de tipo $\binom{0}{2}$ y $\binom{2}{0}$ respectivamente:

$$\begin{aligned} T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1\ldots,i_p} &= T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, f^{j_1}, \ldots, f^{j_q}) = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, g^{j_1 j'_1} e_{j'_1}, \ldots, g^{j_q j'_q} e_{j'_q}) \\ &= g^{j_1 j'_1} \ldots g^{j_q j'_q} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{jq}) = g^{j_1 j'_1} \ldots g^{j_q j'_q} T_{i_1 \ldots, i_p, j'_1, \ldots, j'_q} \end{aligned}$$

Por ejemplo, si T^j_i es un tensor $\binom{1}{1}$, $T^{ji} = g^{ki} T^j_k$ es un tensor $\binom{2}{0}$ y $T_{ji} = g_{jk} T^k_i$ es un tensor $\binom{0}{2}$. *Tensores cartesianos*: En un espacio euclideo V, si nos restringimos a transformaciones isométricas entre bases ortonormales, entonces $g_{ij} = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $g^{ij} = \delta^{ij}$ y $f^i = g^{ij} e_j = e_i$. En tal caso no se puede distinguir entre índices covariantes y contravariantes y se tiene $T^i = T_i$, $T^i_j = T^{ij} = T_{ij}$, $T^{ij}_{kl} = T_{ijkl}$, etc.

Notemos precisamente que para transformaciones entre bases ortonormales (isometrías) $R = S^{-1} = S^t$, es decir, $R^i_j = S^j_i$. En tal caso, $T'^j = R^j_i T^i = \sum_i S^i_j T^i$, verificándose que T^j se transforma igual que T_j.

Pseudotensores cartesianos: Si frente a un cambio de base isométrico en un espacio euclideo se tiene

$$T'_{i'_1 \ldots i'_p} = \mathrm{Det}(S) S^{i_1}_{i'_1} \ldots S^{i_p}_{i'_p} T_{i_1 \ldots i_p}$$

se dice que T es un pseudotensor cartesiano de rango p. Se comporta como un tensor de rango p frente a cambios de base que satisfacen $\mathrm{Det}[S] = +1$ (rotaciones) pero exhibe un cambio de signo adicional si $\mathrm{Det}[S] = -1$ (reflexiones).

Por ejemplo, frente a isométrías, el tensor completamente antisimétrico $F_{i_1,\ldots i_n} = F(e_1, \ldots, e_n)$ es un pseudoescalar, mientras que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = a^i b^j \epsilon_{ijk}$ es un pseudovector ($a'^{i'} b'^{j'} \epsilon_{i'j'k} = R^{i'}_i R^{j'}_j a^i a^j \epsilon_{i'j'k} = R^{i'}_i R^{j'}_j R^{k'}_l S^l_k a^i a^j \epsilon_{i'j'k'} = \mathrm{Det}(R) S^l_k a^i a^j \epsilon_{ijl} = \mathrm{Det}(S) S^l_k (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_l$).

28 Campos tensoriales, símbolos de Christoffel y derivada covariante

Consideremos un cambio general de coordenadas $x'^i(x^1, \ldots, x^n)$ en $V = \mathbb{R}^n$. Tenemos

$$dx'^i = R^i_j dx^j, \quad R^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \partial_j x'^i$$

La matriz inversa es

$$S^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \partial'_j x^i$$

y satisface

$$S^i_j R^j_k = R^i_j S^j_k = \delta^i_k$$

Tanto S como R *dependen ahora de las coordenadas.* Podemos considerar en c/punto la base definida por

$$e'_i = S^j_i e_j$$

siendo aquí $e = (e_1, \ldots, e_n)$ una base de V *independiente* de las coordenadas, y $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ *dependiente* de las coordenadas.

Si e es la base canónica, el tensor métrico original es $g_{ij} = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$ mientras que en la nueva base, $g'_{ij} = (e'_i, e'_j) = S^k_i S^l_j g_{kl} = S^k_i S^l_j \delta_{kl}$, es decir, $g' = S^T S$ en notación matricial. Se obtiene entonces

$$ds^2 \equiv dx_i dx^i = dx'_i dx'^i = dx'^i dx'^j g'_{ij}$$

Un campo vectorial v dependiente de las coordenadas puede pues escribirse como

$$v = v^i(x^1, \ldots, x^n) e_i = v'^i(x'^1, \ldots, x'^n) e'_i, \quad v'^i = R^i_j v^j$$

Generalizando, si $D \subset V$, un campo tensorial real $\binom{q}{p}$ es una función $T : D \to \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{\text{q veces}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{\text{p veces}}$:

$$T = T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(x^1, \ldots, x^n) e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \otimes f^{i_1} \otimes f^{i_p}$$

Frente a un cambio general de coordenadas, se obtiene

$$T = T'^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(x'^1, \ldots, x'^n) e'_{j'_1} \otimes \ldots \otimes e'_{j'_q} \otimes f'^{i_1} \otimes f'^{i_p}$$

con

$$T'^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(x'^1, \ldots, x'^n) = S^{i_1}_{i'_1} \ldots S^{i_p}_{i'_p} R^{j'_1}_{j_1} \ldots R^{j'_q}_{j_q} T^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(x^1, \ldots, x^n)$$

Por ejemplo, un campo vectorial es un campo tensorial $\binom{1}{0}$.

Consideremos ahora la derivada de un campo tensorial $\binom{1}{0}$,

$$\partial'_j v = \partial'_j(v'^i e'_i) = (\partial'_j v'^i) e'_i + v'^i(\partial'_j e'_i)$$

El segundo término da cuenta de la dependencia de la base de las coordenadas. Dado que $e'_i = S^k_i e_k$, se tiene $\partial'_j e'_i = (\partial'_j S^l_i) e_l = (\partial'_j S^l_i) R^k_l e'_k$ y por lo tanto

$$\partial'_j e'_i = \Gamma^k_{ij} e'_k$$

donde $\Gamma^k_{ij} = (\partial'_j S^l_i) R^k_l = -S^l_i \partial'_j R^k_l$ son los *símbolos de Christoffel*, que dan cuenta de la variación de los elementos de la base. Como $S^i_j = \partial'_j x^i \Rightarrow \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, pues $\partial'_j S^l_i = \partial'_j \partial'_i x^l = \partial'_i \partial'_j x^l = \partial'_i S^l_j$.

Se obtiene entonces

$$\partial'_j v = [(\partial'_j v'^k) + v'^i \Gamma^k_{ij}] e'_k$$

La expresión

$$v'^k_{;j} \equiv v'^k_{,j} + v'^i \Gamma^k_{ij}$$

donde $v'^k_{,j} \equiv \partial'_j v'^k$, se denomina *derivada covariante* de las componentes contravariantes, y satisface las reglas correctas de transformación. Tenemos pues

$$\partial'_j v = v'^k_{;j} e'_k$$

En el caso de que la base sea independiente de las coordenadas, $\Gamma^k_{ij} = 0$ y la derivada covariante se reduce a la usual ($v^i_{;j} = v^i_{,j}$).

Por ejemplo, la divergencia de un campo vectorial $v = v^i e_i = v'^i e'_i$ puede entonces expresarse en la forma (demostrar como ejercicio)

$$\partial_i v^i = v^i_{,i} = v'^i_{;i} = (\partial'_i v'^i) + v'^i \Gamma^j_{ij}$$

Para componentes covariantes, tenemos $v = v_i f^i = v'_i f'^i$, con $f'^i = R^i_k f^k$, y f^k independiente de las coordenadas. Por lo tanto,

$$\partial'_j v = (\partial'_j v'_i) f'^i + v'^i(\partial'_j f'^i)$$

Pero $\partial'_j f'^i = (\partial'_j R^i_l) f^l = S^l_k (\partial'_j R^i_l) f'^k = -\Gamma^i_{kj}$ por lo que

$$\partial'_j v = [(\partial'_j v'_k) - v'_i \Gamma^i_{kj}] f'^k$$

La derivada covariante de componentes covariantes debe pues definirse como

$$v'_{k;j}=v'_{k,j}-v'_i\Gamma^i_{kj}$$

para que

$$\partial'_j v=v'_{k;j}f'^k$$

En forma análoga se definen las derivadas covariantes de tensores arbitrarios de rango $\binom{p}{q}$

Dado que $g'_{ik}=S^l_iS^m_kg_{lm}$, tenemos, para g_{lm} independiente de las coordenadas, $\partial'_jg'_{ik}=(\partial'_jS^l_i)S^m_kg_{lm}+S^l_i(\partial'_jS^m_k)g_{lm}=(\partial'_jS^l_i)R^r_lS^s_rS^m_kg_{sm}+(\partial'_jS^m_k)R^r_mS^s_rS^l_ig_{ls}=\Gamma^r_{ij}g'_{rk}+\Gamma^r_{kj}g'_{ir}$, por lo que

$$g'_{ik;j}=g'_{ik,j}-g'_{lk}\Gamma^l_{ij}-g'_{il}\Gamma^l_{kj}=0$$

De esta forma, si $v'_i=g'_{ik}v'^k$ se verifica que $v'_{i;j}=g'_{ik}v'^k_{;j}$. La última ecuación permite también escribir los símbolos de Christoffel directamente en términos de derivadas del tensor métrico:

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}(g_{mk,l}+g_{ml,k}-g_{kl,m})$$

Ejemplo: Para $V=\mathbb{R}^2$ y coordenadas polares, definidas por

$$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta$$

se obtiene $dx=dr\cos\theta-r\sin\theta d\theta$, $dy=dr\sin\theta+r\cos\theta d\theta$, de forma que

$$S=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix},\quad R=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad g'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{pmatrix}$$

con $dr=dx\cos\theta+dy\sin\theta$, $d\theta=(-dx\sin\theta+dy\cos\theta)/r$,
$e_r=e_x\cos\theta+e_y\sin\theta$, $e_\theta=r(-e_x\sin\theta+e_y\cos\theta)$, y e_x,e_y la base canónica. Obtenemos entonces

$$ds^2=dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\theta^2$$

En este caso, los únicos símbolos de Christoffel no nulos son $\Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\theta_{\theta r}=1/r$, $\Gamma^r_{\theta\theta}=-r$.

La divergencia de un campo vectorial

$$v=v^xe_x+v^ye_y=v^re_r+v^\theta e_\theta$$

es entonces

$$\partial_xv^x+\partial_yv^y=\partial_rv^r+\partial_\theta v^\theta+v^r\Gamma^\theta_{r\theta}=\partial_rv^r+\partial_\theta v^\theta+v^r/r$$

El gradiente de un campo escalar ϕ puede escribirse en la forma $(\partial^i\phi)e_i=(\partial'^i\phi)e'_i$, donde $\partial'^i=g'^{ij}\partial'_j$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}e_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}e_y=\frac{\partial\phi}{\partial r}e_r+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}e_\theta$$

Finalmente, el Laplaciano de un campo escalar ϕ (la divergencia del gradiente de ϕ) puede expresarse como

$$\partial_i\partial^i\phi=\partial'_i\partial'^i\phi+\Gamma^i_{ji}\partial'^j\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}$$