17. Formas lineales, bilineales y cuadráticas

17.1 Formas lineales

Estudiaremos ahora funciones escalares lineales de argumento vectorial. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Una forma lineal es una función $F : V \to K$ que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} F(\alpha v) &= \alpha F(v) \;\; \forall v \in V, \; \alpha \in K & (1) \\ F(v_1 + v_2) &= F(v_1) + F(v_2) \;\; \forall v_1, v_2 \in V & (2) \end{aligned}$$

Una forma lineal puede ser considerada como un caso particular de transformación lineal si se considera el cuerpo K como un espacio vectorial de dimensión 1 sobre el mismo K. Nótese que se satisface $F(0) = 0$.
Ejemplos (se dejan las comprobaciones para el lector):
1) Si $K = \mathbb{R}$ y $V = \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = x + y$ es claramente una forma lineal, mientras que $G(x, y) = x + y^2$ y $H(x, y) = 1 + x$ no son formas lineales.
2) Si $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, la traza de una matriz $A \in V$, $\mathrm{Tr}[A] = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$, es una forma lineal.
3) Si $K = \mathbb{R}$ y $V = C_{[a,b]}$ (espacio de funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$),

$$T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

es una forma lineal, y también lo es (para $\rho \in C_{[a,b]}$)

$$T_\rho(f) = \int_a^b f(x)\rho(x)dx\,.$$

4) En el mismo espacio anterior, y para $a < 0 < b$, $T(f) = f(0)$ es también una forma lineal. Nótese sin embargo que en este caso no existe $\rho(x)$ continua tal que $T(f) = \int_a^b f(x)\rho(x)dx$.
5) Si $V = \mathbb{R}^n$ y w es un vector fijo de $\mathbb{R}^n$,

$$F_w(v) = w \cdot v$$

(producto escalar usual) es una forma lineal. Por ej. el primer caso de 1), $F(x, y) = x + y$, puede ser escrito como $F(x, y) = (1, 1) \cdot (x, y)$. *Toda* forma lineal en $\mathbb{R}^n$ puede ser escrita de esta manera en términos de un único vector $w \in V$, como se verá a continuación.

Si $\dim V = n$ y F no es la forma lineal nula $\Rightarrow \dim I(F) = 1$, por lo que $\dim N(F) = n - 1$. Ejemplo: Hallar el núcleo de la forma lineal del ejemplo 2.

En un espacio vectorial V de dimensión finita n, la forma lineal queda completamente determinada por los valores que asigna a los elementos de una base: Si $B = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base de V y $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \Rightarrow$

$$F(v) = F(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(b_i) = [F]_B[v]_B$$

donde

$$[F]_B = (F(b_1), \ldots, F(b_n))$$

es la matriz fila que representa a F en la base B y

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

la matriz columna de coordenadas de v en dicha base. El producto $[F]_B[v]_B$ puede entonces visualizarse como el producto escalar usual de los vectores $[F]_B$ y $([v]_B)^t$ de K^n. En $V = \mathbb{R}^n$ toda forma lineal puede pues ser escrita en la forma $F(v) = w \cdot v$, con $w = [F]_e = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, siendo e la base canónica y $\beta_i = F(e_i) = w \cdot e_i$.
Frente a un cambio de base,

$$b'_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ji} b_j, \quad i = 1, \ldots, n$$

con S una matriz no singular ($|S| \neq 0$) se obtiene $F(b'_i) = \sum_{j=1}^{n} S_{ji} F(b_j)$ y por lo tanto

$$[F]_{B'} = [F]_B S$$

con lo cual, dado que $[v]_B = S[v]_{B'}$, $F(v) = [F]_B[v]_B = [F]_B S[v]_{B'} = [F]_{B'}[v]_{B'}$.

Si $F : V \to K$ y $G : V \to K$ son dos formas lineales sobre V, la combinación lineal $\alpha F + \beta G$, definida por $(\alpha F + \beta G)(v) = \alpha F(v) + \beta G(v)$, es también una forma lineal $\forall\ \alpha, \beta \in K$, como es muy fácil comprobar. El conjunto de todas las formas lineales $F : \mathbb{V} \to K$ es pues un espacio vectorial denominado *espacio dual* V^*. Si V es de dimensión finita $\Rightarrow$

$$\dim V^* = \dim V$$

ya que existe un isomorfismo entre V^* y K^n (definido por $\mathcal{G}_B(F) = [F]_B \in K^n$, con $n = \dim V$) y por lo tanto entre V^* y V. Si $B = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base ordenada de V, la base asociada de V^* es la base dual $B^* = \{F_1, \ldots, F_n\}$, donde $F_i : V \to K$ está definido por $F(\sum_i \alpha_i b_i) = \alpha_i$, es decir,

$$F_i(b_j) = \delta_{ij}\,.$$

F_i es pues representado por el vector fila $[F_i]_B = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0) = e_i$.

17.2 Formas bilineales

Una función escalar de dos variables vectoriales, $A : V \times V \to K$, es una forma bilineal si satisface

$$A(\alpha v, w) = \alpha A(v, w), \quad A(v_1 + v_2, w) = A(v_1, w) + A(v_2, w)\ \ \forall v, v_1, v_2, w \in V,\ \alpha \in K$$

$$A(v, \alpha w) = \alpha A(v, w), \quad A(v, w_1 + w_2) = A(v, w_1) + A(v, w_2)\ \ \forall w, w_1, w_2, v \in V,\ \alpha \in K$$

A es entonces una forma bilineal si es lineal con respecto a sus dos argumentos vectoriales.
Ejemplos (se dejan las comprobaciones como ejercicio):
1) Si $V = \mathbb{R}^2$ y $K = \mathbb{R}$, con $v = (x, y)$, $w = (z, t)$, las siguientes funciones son formas bilineales:

$$A(v, w) = v \cdot w = xz + yt \quad \text{(producto escalar)}$$

$$B(v, w) = xt - yz \ \ \text{(determinante de } \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right))$$

2) Si $V = C_{[a,b]}$ y $K = \mathbb{R}$, las siguientes funciones son formas bilineales:

$$A(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx\,, \quad B(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx\,, \quad C(f, g) = \int_a^b \int_a^b f(x)K(x, x')g(x')dxdx'$$

donde $\rho(x)$ y $K(x, x')$ son continuas.
3) En el mismo espacio anterior, para $a < 0 < b$, también son formas bilineales $T(f, g) = f(0)g(0)$ y $H(f, g) = f(0)g(c)$, con $c \in [a, b]$ fijo. Estas formas no pueden ser escritas en la forma integral del ejemplo anterior para ρ y K continuas.
4) En $V = \mathbb{R}^{n\times 1}$,

$$A(v, w) = v^t A w$$

donde $v^t = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ y A es una matriz real de $n \times n$, es una forma bilineal. *Toda* forma bilineal en $\mathbb{R}^{n\times 1}$ (y por lo tanto $\mathbb{R}^n$) puede escribirse de esta manera, como se verá a continuación. Por ejemplo, las formas del ejemplo 1) pueden ser escritas como $A(v, w) = (x, y)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} z \\ t \end{smallmatrix}\right)$, $B(v, w) = (x, y)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} z \\ t \end{smallmatrix}\right)$.

Representación matricial. En un espacio vectorial V de dimensión finita n, la forma bilineal queda completamente determinada por los valores que asigna a pares ordenados de elementos de una base $B = (b_1, \ldots, b_n)$ de V. Si $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, $w = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \Rightarrow$

$$A(v, w) = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j b_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A(b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j ebj) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j A(b_i, b_j)$$

La igualdad anterior puede escribirse en forma compacta matricial como

$$A(v, w) = [v]_B^t [A]_B [w]_B$$

donde $[v]_B^t = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $[w]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ y

$$[A]_B = \begin{pmatrix} A(b_1, b_1) & \ldots & A(b_1, b_n) \\ & \ldots & \\ A(b_n, b_1) & \ldots & A(b_n, b_n) \end{pmatrix}$$

es la matriz de $n \times n$ que representa a la forma bilineal A en dicha base $[([A]_B)_{ij} = A(b_i, b_j)]$.
Por ej., si $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ y e es la base canónica, obtenemos, para los casos del ejemplo 1) y $v = (x, y) = xe_1 + ye_2$, $w = (z, t) = ze_1 + te_2$,

$$A(v, w) = xz + yt = (x, y)[A]_e\binom{z}{t}, \;\; [A]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(v, w) = xt - yz = (x, y)[B]_e\binom{z}{t}, \;\; [B]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la matriz $[C]_e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ determina la forma bilineal

$$C(v, w) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = xz + 2xt + 3yz + 4yt$$

Una forma bilineal es *simétrica* si

$$A(v, w) = A(w, v) \; \forall v, w \in V$$

y *antisimétrica*

$$A(v, w) = -A(w, v) \; \forall v, w \in V$$

Toda forma bilineal puede escribirse como suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica:

$$A(v, w) = \frac{A(v, w) + A(w, v)}{2} + \frac{A(v, w) - A(w, v)}{2} = A_s(v, w) + A_a(v, w)$$

El conjunto de formas bilineales de $V \times V$ sobre K forma un espacio vectorial W (con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar) y la anterior descomposición corresponde a la suma directa $W = W_s \oplus W_a$, con W_s, W_a los subespacios de formas bilineales simétricas y antisimétricas sobre K.
En espacios V de dimensión finita, las correspondientes matrices en cualquier base dada son simétricas y antisimétricas respectivamente:

$$A(v, w) = A(w, v) \Rightarrow [A]_B^t = [A]_B, \;\; \text{pues } A(b_i, b_j) = A(b_j, b_i)$$

$$A(v, w) = -A(w, v) \Rightarrow [A]_B^t = -[A]_B, \;\; \text{pues } A(b_i, b_j) = -A(b_j, b_i)$$

En los ejemplos anteriores, el primero (producto escalar) es una forma bilineal simétrica mientras que el segundo (determinante) es una forma antisimétrica.

Dada una forma bilineal A arbitraria, notemos que $A(v, 0) = A(0, w) = 0 \; \forall \; v, w \in V$, como el lector podrá fácilmente demostrar. Si además existe $w \neq 0$ tal que $A(v, w) = 0 \; \forall \; v \in V$, la forma bilineal se dice que es **singular**. En caso contrario se dice **no singular**.
En un espacio V de dimensión finita, *A es singular si y sólo si la matriz que la representa en una base cualquiera, $[A]_B$, es singular.*
Dem.: Si $[A]_B$ es singular, existe un vector columna $[w]_B$ no nulo tal que $[A]_B[w]_B = 0$ y por lo tanto, $A(v, w) = [v]_B^t[A]_B[w]_B = [v]_B^t 0 = 0 \; \forall \; v \in V$.
Por otro lado, si existe $w \neq 0$ tal que $A(v, w) = 0 \; \forall v \in V$, y B es una base cualquiera de $V \Rightarrow [v]_B^t[A]_B[w]_B = 0 \; \forall$ vector $[v]_B^t \in K^{n \times 1}$, lo que implica $[A]_B[w]_B = 0$. Como $[w]_B \neq 0$, la matriz $[A]_B$ es entonces singular.
En espacios de dimensión finita, si $\exists \; w \; / \; A(v, w) = 0 \; \forall \; v \in V \Rightarrow \exists \; u \in V \; / \; A(u, v) = 0 \; \forall \; v \in V$, pues si $[A]_B$ es singular $\Rightarrow [A]_B^t$ es también singular ($|[A]_B^t| = |[A]_B| = 0$).
Notemos también que si A es no singular y $A(v, w_1) = A(v, w_2) \; \forall \; v \in V \Rightarrow w_1 = w_2$, ya que en tal caso $A(v, w_1 - w_2) = 0 \; \forall \; v \in V$ y por lo tanto $w_1 - w_2 = 0$.

17.3 Cambio de base en formas bilineales

Consideremos una forma bilineal A. Frente a un cambio de base

$$b'_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ji} b_j, \quad i = 1, \ldots, n$$

se tiene

$$A(b'_i, b'_k) = A(\sum_{j=1}^{n} S_{ji} b_j, \sum_{l=1}^{n} S_{lk} b_l) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} S_{ji} A(b_j, b_l) S_{lk} = (S^t[A]_B S)_{ik}$$

Se obtiene entonces la ley de transformación

$$[A]_{B'} = S^t[A]_B S$$

donde $([A]_{B'})_{ij} = A(b'_i, b'_j)$ para $i, j = 1, \ldots, n$. De esta forma,

$$A(v, w) = [v]_B^t[A]_B[w]_B = (S[v]_{B'})^t[A]_B(S[w]_{B'}) = [v]_{B'}^t S^t[A]_B S[w]_{B'} = [v]_{B'}^t[A]_{B'}[w]_{B'}$$

Nótese la diferencia con la ley de transformación de matrices que representan operadores lineales $F : V \to V$ en una base, para las que $[F]_{B'} = S^{-1}[F]_B S$. Notemos también que ($|\ldots|$ denota el determinante)

$$|[A]_{B'}| = |S^t[A]_B S| = |S^t||[A]_B||S| = |S|^2|[A]_B|$$

por lo que el signo del determinante no depende de la base (pues $|S| \neq 0$). Si A es singular, $|[A]_B| = 0$ y entonces $|[A]_{B'}| = 0$ en cualquier base.
Otra consecuencia es que como S es no singular ($|S| \neq 0$), el rango de $[A]_B$ (dimensión del espacio fila o columna de $[A]_B$) es también independiente de la base.
Podemos también corroborar que el carácter simétrico o antisimétrico es independiente de la base elegida:

$$[A]_{B'}^t = (S^t[A]_B S)^t = S^t[A]_B^t S$$

por lo que $[A]_{B'}^t = \pm[A]_{B'}$ si $[A]_B^t = \pm[A]_B$.

Ejemplo: Para el caso del producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$, $[A]_e = I_n$ en la base canónica e y por lo tanto $[A]_{e'} = S^t[A]_e S = S^t S$ en una base arbitraria e', tal como se adelantó en el apunte 4 sobre cambio de base.
Ejemplo: Para el caso del determinante en $\mathbb{R}^2$, $[A]_e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ en la base canónica y por lo tanto, en un base e' determinada por una matriz $S = [I]_e^{e'} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ no singular ($|S| \neq 0$),

$$[A]_{e'} = S^t[A]_e S = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (ad - bc)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = |S|[A]_e$$

$[A]_{e'}$ es pues proporcional a $[A]_e$. Este resultado es obvio pues $[A]_{e'}$ debe ser antisimétrica y toda matriz antisimétrica de 2×2 debe ser proporcional a $[A]_e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Ejemplo: Si $[A]_B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $b'_1 = (b_1 + b_2)$, $b'_2 = b_2 - b_1$, $S = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y por lo tanto

$$[A]_{B'} = S^t[A]_B S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, si $v = xb_1 + yb_2 = x'b'_1 + y'b'_2$, $w = zb_1 + tb_2 = z'b'_1 + t'b'_2$,

$$A(v, w) = (x, y)[A]_B\left(\begin{smallmatrix} z \\ t \end{smallmatrix}\right) = (x', y')[A]_{B'}\left(\begin{smallmatrix} z' \\ t' \end{smallmatrix}\right)$$

o sea,

$$A(v, w) = xt + yz = 2(x'z' - y't')$$

lo que está de acuerdo con $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = S\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x'-y' \\ x'+y' \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} z \\ t \end{smallmatrix}\right) = S\left(\begin{smallmatrix} z' \\ t' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} z'-t' \\ z'+t' \end{smallmatrix}\right)$

18 Formas cuadráticas

Si A es una forma bilineal de $V \times V$ en K, la función $\tilde{A} : V \to K$ dada por

$$\tilde{A}(v) = A(v, v)$$

se denomina *forma cuadrática*. Notemos que satisface $\tilde{A}(\alpha v) = \alpha^2 \tilde{A}(v)\ \forall\ \alpha \in K,\ v \in V$: $A(\alpha v, \alpha v) = \alpha A(v, \alpha v) = \alpha^2 A(v, v)$.
Es importante notar que la forma cuadrática queda completamente determinada por la parte simétrica de la forma bilineal, ya que $A_a(v, v) = [A(v, v) - A(v, v)]/2 = 0$ y por lo tanto

$$A(v, v) = A_s(v, v)$$

Asimismo, la parte simétrica de una forma bilineal queda completamente determinada por la forma cuadrática respectiva, ya que

$$A_s(v + w, v + w) = A_s(v, v) + A_s(w, w) + 2A_s(v, w)$$

y por lo tanto

$$A_s(v, w) = [A_s(v + w, v + w) - A_s(v, v) - A_s(w, w)]/2$$

En un espacio vectorial V de dimensión finita n, podemos entonces escribir, para A *simétrica*,

$$\begin{aligned} A(v, v) &= [v]_B^t [A]_B [v]_B \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i A(b_i, b_j)\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A(b_i, b_i)\alpha_i^2 + 2\sum_{i<j} A(b_i, b_j)\alpha_i\alpha_j \end{aligned} \tag{3}$$

Ejemplo: Si $V = \mathbb{R}^2$ y $K = \mathbb{R}$, la longitud al cuadrado de un vector $v = (x, y)$,

$$|v|^2 = x^2 + y^2$$

es una forma cuadrática y puede escribirse como

$$|v|^2 = (x, y)\binom{x}{y} = (x, y)[A]_e\binom{x}{y} = A(v, v)$$

con $[A]_e = I_2$, $A(v, w) = v \cdot w$ y e la base canónica.
También es una forma cuadrática

$$\tilde{B}(v) = 3x^2 + 5y^2 + 2xy = (x, y)[B]_e\binom{x}{y},\quad [B]_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Toda forma cuadrática en $V = \mathbb{R}^n$ o $V = \mathbb{R}^{n\times 1}$ puede escribirse como

$$\tilde{A}(v) = v^t A v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\alpha_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}\alpha_i\alpha_j$$

con $a_{ij} = A_{ij} = a_{ji}$ los elementos de la matriz real *simétrica* A de $n \times n$ ($A^t = A$).
Ejemplo: Si $V = C_{[a,b]}$ y $K = \mathbb{R}$,

$$||f||^2 \equiv \int_a^b [f(x)]^2 dx = A(f, f)$$

es una forma cuadrática. También lo es $\tilde{C}(f) = \int_a^b \int_a^b K(x, x')f(x)f(x')dxdx'$.

18.1 Forma canónica de una forma cuadrática

Teorema: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo K y sea $A : V \times V \to K$ una forma bilineal *simétrica*. Entonces existe una base B' en la que

$$A(b'_i, b'_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a'_i & i = j \end{cases}$$

es decir, $A(b'_i,b'_j)=a'_i\delta_{ij}$. Esto implica, partiendo de una base arbitraria B, que existe una matriz de cambio de base S tal que

$$[A]_{B'}=S^t[A]_BS=\begin{pmatrix}a'_1&0&\ldots&0\\0&a'_2&\ldots&0\\&&\ldots&\\0&0&\ldots&a'_n\end{pmatrix}$$

o sea, $([A]_{B'})_{ij}=a'_i\delta_{ij}$. En dicha base la forma bilineal toma entonces la forma diagonal o canónica

$$A(v,w)=\sum_{i=1}^n a'_i\alpha'_i\beta'_i$$

donde $v=\sum_{i=1}^n\alpha'_ib'_i$, $w=\sum_{i=1}^n\beta'_ib'_i$, y la correspondiente forma cuadrática toma la forma canónica

$$\tilde{A}(v)=A(v,v)=\sum_{i=1}^n a'_i{\alpha'_i}^2$$

Antes de proceder a la demostración, cabe destacar que ni los coeficientes a'_i, ni los vectores b'_i, son únicos. Por ejemplo, en la base B'' definida por $b''_i=\gamma_ib'_i$, $i=1,\ldots,n$, tenemos $A[b''_i,b''_j]=\gamma_i^2a'_i\delta_{ij}$, y por lo tanto A toma también la forma canónica, con $a'_i\rightarrow a''_i=\gamma_i^2a'_i$.

Notemos también que si la forma bilineal no es simétrica, no es posible encontrar una base en la que $[A]_{B'}$ sea diagonal: Si existiese, $[A]_{B'}$ sería simétrica y por lo tanto $[A]_{B''}=S^t[A]_{B'}S$ sería también simétrica en cualquier base B'' (y la forma bilineal sería entonces simétrica).

Demostración: En el caso de que $K=\mathbb{R}$, la demostración es inmediata si recordamos que toda matriz real simétrica A es siempre diagonalizable, que todos sus autovalores son reales y que sus autovectores pueden siempre elegirse ortogonales y de longitud 1 (véase apunte de autovalores).
Por lo tanto, existirá una matriz de cambio de base S formada por autovectores normalizados de $[A]_B$, con $|S|\neq 0$ y $S^{-1}=S^t$, tal que $S^{-1}[A]_BS=S^t[A]_BS$ es *diagonal*. Si B' es dicha base de autovectores, tendremos entonces

$$[A]_{B'}=S^t[A]_BS=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\ldots&0\\0&\lambda_2&\ldots&0\\&&\ldots&\\0&0&\ldots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

con $a'_i=\lambda_i$ los autovalores de $[A]_B$.

No obstante, cabe destacar que diagonalizar $[A]_B$ no es el único procedimiento para llevar una forma cuadrática a una forma diagonal. Esto puede también lograrse utilizando la conocida y simple técnica de *completar cuadrados*, en la cual se basa la demostración del teorema para un cuerpo arbitrario K, que damos a continuación. En tales casos, los coeficientes diagonales a'_i *no son necesariamente iguales a los autovalores de* A.

Notemos primero que si encontramos una transformación lineal de coordenadas

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\ldots\\\alpha_n\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}\alpha'_1\\\ldots\\\alpha'_n\end{pmatrix}$$

(o sea, $[v]_B=S[v]_{B'}$) con S una matriz de $n\times n$ no singular ($|S|\neq 0$), tal que

$$A(v,v)=\sum_{i,j=1}^n A(b_i,b_j)\alpha_i\alpha_j=\sum_{i,j,k,l}S_{ik}A(b_i,b_j)S_{jl}\alpha'_k\alpha'_l=\sum_{i=1}^n a'_i{\alpha'_i}^2$$

hemos entonces encontrado una base canónica para la forma bilineal, dada por

$$b'_i=\sum_{j=1}^n S_{ji}b_j\quad i=1,\ldots,n$$

ya que en tal caso $[v]_B = S[v]_{B'}$ y $([A]_{B'})_{ij} = (S^t[A]_B S)_{ij} = a'_i\delta_{ij}$. El problema se reduce pues al de encontrar variables α'_i relacionadas linealmente con las α_i por una transformación no singular, en las que la forma cuadrática sea diagonal.

Procederemos ahora por inducción sobre la dimensión n de V. Para $n = 1$, toda forma cuadrática tiene trivialmente la forma canónica en cualquier base: Si $v \in V \to v = \alpha b_1$ y $\tilde{A}(v) = a'_1\alpha^2$, con $a'_1 = A(b_1, b_1)$. Para $n > 1$, supongamos que hemos demostrado que toda forma cuadrática en un espacio de dimensión $n-1$ puede escribirse en la forma canónica. Entonces,

$$A(v,v) = a_{nn}\alpha_n^2 + 2(a_{n1}\alpha_n\alpha_1 + \ldots + a_{n,n-1}\alpha_n\alpha_{n-1}) + g(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$$

donde $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, $a_{ij} = A(b_i, b_j)$ y g representa una forma cuadrática de dimensión $n-1$. Si $a_{nn} \neq 0$ podemos escribir

$$A(v,v) = a_{nn}(\alpha_n^2 + 2\alpha_n \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a_{nj}/a_{nn}) + g(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}) = a_{nn}(\alpha_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a_{nj}/a_{nn})^2 + h(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$$

donde $h = g - a_{nn}(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a_{nj}/a_{nn})^2$. Por lo tanto

$$A(v,v) = a_{nn}{\alpha'_n}^2 + h(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}), \;\; \alpha'_n = \alpha_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a_{nj}/a_{nn}$$

Y como h representa una forma cuadrática de dimensión $n-1$, podemos escribirla en forma canónica como $h = \sum_{i=1}^{n-1} a'_i {\alpha'_i}^2$, donde α'_i son combinaciones lineales de los α_j, $j = 1,\ldots,n-1$. Finalmente obtenemos la forma canónica

$$A(v,v) = a'_n {\alpha'_n}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a'_i {\alpha'_i}^2$$

donde $a'_n = a_{nn}$ y la matriz de transformación $T = S^{-1}$ es de la forma

$$T = \begin{pmatrix} T_{n-1} & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

con T_{n-1} una matriz no singular de $(n-1)\times(n-1)$ y t el vector de $n-1$ componentes determinado por α'_n ($t_i = a_{ni}/a_{nn}$). T es por consiguiente no-singular y define una base B' determinada por $S = T^{-1}$ en la que A tiene la forma canónica.
Si $a_{nn} = 0$ pero $a_{ii} \neq 0$ para algún $i < n$, podemos proceder en forma similar realizando la correspondiente permutación $i \leftrightarrow n$. Finalmente, si todos los a_{ii} son nulos pero existe algún elemento $a_{in} \neq 0$ con $i \neq n$ (pues de lo contrario tendríamos una forma de dimensión $n-1$), podemos efectuar primero el cambio de variables $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n + \tilde{\alpha}_i$, $\alpha_i = \tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_i$, con lo cual $2a_{ij}\alpha_i\alpha_j = 2a_{ij}(\tilde{\alpha}_n^2 - \tilde{\alpha}_i^2)$ y podemos entonces proceder como en los casos anteriores.

Ejemplo: para $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ y $v = (x,y) = xe_1 + ye_2$, consideremos

$$A(v,v) = (x,y)[A]_e\binom{x}{y} = x^2 + y^2 + 4xy$$

que coresponde a

$$[A]_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si optamos por el método (muy simple) de completar cuadrados, tenemos

$$x^2 + y^2 + 4xy = x^2 + (y+2x)^2 - 4x^2 = -3x^2 + (y+2x)^2$$

por lo que podemos escribir

$$A(v,v) = -3x'^2 + y'^2, \;\text{ con }\; y' = (2x+y),\; x' = x$$

Esto corresponde a la transformación

$$\binom{x'}{y'} = T\binom{x}{y}, \;\; T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Por lo tanto

$$S = T^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

y la base en la que A toma la forma canónica queda entonces determinada por las columnas de S:

$$e'_1 = e_1 - 2e_2 \quad e'_2 = e_2$$

Se verifica entonces

$$[A]_{e'} = S^t [A]_e S = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

es decir, $A(e'_1, e'_1) = -3$, $A(e'_2, e'_2) = 1$, $A(e'_1, e'_2) = 0$, como es posible corroborar directamente.

Podemos también optar por el método basado en la diagonalización de A. Tenemos $|[A]_e - \lambda I_2| = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$, de donde $\lambda = 1 \pm 2$, o sea, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.
Las componentes de los autovectores correspondientes normalizados son $[e''_1]_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $[e''_2]_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, o sea, $e''_1 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, $e''_2 = (-e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, y la correspondiente matriz de cambio de base es

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad S^{-1} = S^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Se verifica entonces

$$[A]_{e''} = S^t [A]_e S = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$$

Es muy importante que los autovectores esten normalizados para que $S^{-1} = S^t$. Finalmente, se obtiene,

$$A(v, v) = (x'', y'')^t [A]_{e''} \left(\begin{smallmatrix} x'' \\ y'' \end{smallmatrix}\right) = 3x''^2 - y''^2$$

donde $\left(\begin{smallmatrix} x'' \\ y'' \end{smallmatrix}\right) = [v]_{e''} = S^{-1}[v]_e = S^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} x+y \\ x-y \end{smallmatrix}\right)$, o sea, $x'' = (x+y)/\sqrt{2}$, $y'' = (x-y)/\sqrt{2}$.
Notemos que tanto los coeficientes diagonales como las bases obtenidas con los dos procedimientos anteriores son *distintos*. La diagonalización puede llevar más tiempo pero posee la ventaja que automáticamente proporciona una base *ortogonal* en la que la forma cuadrática tiene la forma canónica, lo cual es muy importante en diversas aplicaciones físicas.
Notemos también que el número de coeficientes positivos y negativos en la forma canónica obtenidos en ambos procedimientos *es el mismo*. Esta conclusión es general y se demostrará en el siguiente teorema, de gran importancia.

18.2 Teorema de inercia de formas cuadráticas:
Sea $A(v, v) : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}$. El número de coeficientes a'_i positivos, negativos y nulos en cualquier forma canónica de A es el mismo.
Dem.: Consideremos dos formas canónicas distintas, tal que

$$A(v, v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a'_i {\alpha'_i}^2$$

con $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e'_i$, $A(e_i, e_j) = a_i \delta_{ij}$, $A(e'_i, e'_j) = a'_i \delta_{ij}$, y

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \dots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

o sea, $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \alpha'_j$ para $i = 1, \dots, n$, con $|S| \neq 0$.
Supongamos ahora que $a_i \begin{cases} > 0 & i = 1, \dots, k \\ < 0 & i = k+1, \dots, m \\ 0 & i = m+1, \dots, n \end{cases}$, $a'_i \begin{cases} > 0 & i = 1, \dots, p \\ < 0 & i = p+1, \dots, q \\ 0 & i = q+1, \dots, n \end{cases}$. Por consiguiente,

$$A(v, v) = \sum_{i=1}^{k} |a_i| \alpha_i^2 - \sum_{i=k+1}^{m} |a_i| \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{p} |a'_i| {\alpha'_i}^2 - \sum_{i=p+1}^{q} |a'_i| {\alpha'_i}^2$$

Veremos ahora que si se supone $k < p$ se llega a un absurdo. Si $k < p$, podemos elegir $v \in V$, $v \neq 0$, tal que las primeras k componentes de v en la base e sean nulas ($\alpha_i = 0$ si $i \leq k$), y tal que sus últimas $n-p$ componentes en la base e' sean también nulas ($\alpha'_i = 0$ si $i > p$). En efecto, esto conduce al sistema de k ecuaciones homogéneas $0 = \sum_{j=1}^{p} S_{ij}\alpha'_j$ para $i = 1, \ldots, k$, con $p > k$ incógnitas α'_j, $j = 1, \ldots, p$, el cual posee entonces infinitas soluciones (y por lo tanto, soluciones no nulas). Para tal vector, tendríamos

$$A(v,v) = -\sum_{i=k+1}^{m} |a_i|\alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{p} |a'_i|{\alpha'_i}^2$$

pero el segundo miembre es menor o igual a 0 y el tercero mayor que 0, lo que es imposible. Por lo tanto, no puede ser $k < p$. De la misma manera se prueba que no puede ser $p < k$. Por lo tanto, la única posibilidad es $k = p$, es decir, que el número de coeficientes positivos es el mismo.
De la misma forma (se dejan los detalles para el lector) se prueba que $m-k = q-p$ (el número de coeficientes negativos es el mismo).
Finalmente, los dos resultados anteriores implican $n - m = n - q$, es decir, que el número de coeficientes nulos es el mismo.

El número k (número de coeficientes positivos de la forma canónica) se denomina índice de inercia positivo y $m - k$ (número de coeficientes negativos) índice de inercia negativo.
El rango de una forma bilineal simétrica coincide con el rango de la matriz $[A]_e$ y es por lo tanto m (es decir, el número de coeficientes no nulos).
Si A es no singular $\Rightarrow m = n$ (el número de coeficientes nulos es 0).

Ejemplo: Consideremos, para $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} = K$,

$$A(v,v) = x^2 + y^2 + 2xy$$

Completando cuadrados llegamos fácilmente a

$$A(v,v) = (x+y)^2 = 1{x'}^2 + 0{y'}^2$$

con $x' = (x+y)$, $y' = y$. Es decir, existe un coeficiente positivo ($a_1 = 1$) y uno nulo ($a_2 = 0$).
Si en cambio optamos por diagonalizar la matriz correspondiente ($[A]_e = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$), obtenemos $|A - \lambda I_2| = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$ y por lo tanto $\lambda = 1 \pm 1$, o sea, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. Obtenemos entonces un autovalor positivo y uno nulo.

Ejemplo: Consideremos, para $V = \mathbb{R}^3$,

$$A(v,v) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$$

Completando cuadrados,

$$A(v,v) = (x+y+z)^2 - (y+z)^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2yz = {x'}^2 + 2{y'}^2 - 2{z'}^2$$

donde $x' = x + y + z$, $z' = (z+y)/2$, $y' = (y-z)/2$ (se reemplazó $y = z' + y'$, $z = z' - y'$).
Esto implica que $[A]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tendrá dos autovalores positivos y uno negativo. En efecto, $|A - \lambda I_3| = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 2) = 0$ conduce a $\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2} > 0$, $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2} < 0$.
Obtendremos en la correspondiente base de autovectores normalizados la forma canónica

$$A(v,v) = x''^2 + (1+\sqrt{2})y''^2 + (1-\sqrt{2})z''^2$$

18.3 Formas cuadráticas positivas y aplicaciones

Una forma cuadrática sobre $K = \mathbb{R}$ se denomina definida positiva (o estríctamente positiva) si

$$A(v,v) > 0 \quad \forall\, v \neq 0$$

Es fácil ver que A **es definida positiva si y sólo si los coeficientes diagonales** a_i **de la forma canónica son todos positivos:** $a_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$ (es decir, $k = n$). En efecto, en tal caso

$$A(v,v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^2 > 0 \ \ \forall \ \ v \neq 0$$

donde ahora hemos escrito $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, con $B = (b_1, \ldots, b_n)$ una base donde A toma la forma canónica ($A(b_i, b_j) = a_i \delta_{ij}$). Por otro lado, si $A(v,v) > 0 \ \forall \ v \neq 0$, entonces $a_i = A(b_i, b_i) > 0$.

Para una forma cuadrática definida positiva, *podemos siempre elegir una base en la que* $a_i = 1$ para $i = 1, \ldots, n$: En efecto, si $A(b_i, b_j) = a_i \delta_{ij}$, con $a_i > 0$, podemos definir la base de elementos $e_i = b_i/\sqrt{a_i}$ en la que $A(e_i, e_j) = A(b_i, b_j)/\sqrt{a_i a_j} = (a_i/\sqrt{a_i^2})\delta_{ij} = 1\delta_{ij}$.
Notemos también que el determinante de la matriz que representa una forma cuadrática positiva es positivo en cualquier base. En la base B en la que A toma la forma canónica,

$$|[A]_B| = a_1 a_2 \ldots a_n > 0$$

y en cualquier otra base B' de V,

$$|[A]_{B'}| = \begin{vmatrix} A(b'_1, b'_1) & \ldots & A(b'_1, b'_n) \\ & \ldots & \\ A(b'_n, b'_1) & \ldots & A(b'_n, b'_n) \end{vmatrix} = |S^t [A]_B S| = |S|^2 |[A]_B| > 0$$

Además notemos que A sigue siendo positiva en cualquier subespacio de V (pues $A(v,v) > 0 \ \forall \ v \neq 0$), por lo que el determinante de cualquier menor de $[A]_{B'}$ (obtenido al suprimir un número dado de columnas y las respectivas filas de $[A]_{B'}$) es también siempre positivo. Por ejemplo, si consideramos el subespacio generado por los primeros $m \leq n$ elementos de la base B', tendremos

$$|[A]_m| > 0$$

donde $[A]_m$ es la matriz de $m \times m$ de elementos $A(b'_i, b'_j)$, $i \leq m$, $j \leq m$, que representa a A en la base $(b'_1, \ldots, b'_m)$ del subespacio anterior.

Más aún, A **es definida positiva si y sólo si todos los determinantes principales en una base arbitraria** B' **de** V **son positivos**, es decir, si $|[A]_m| > 0$ para $m = 1, \ldots, n$.
Dem.: Por inducción: Para $n = 1$ es obviamente válido. Asumiendo ahora que es válido para $n-1$, entonces existe una base canónica $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ del subespacio generado por los primeros $n-1$ vectores de la base original B', en la que $A(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Definiendo ahora

$$e_n = b'_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$$

con $\alpha_i = A(e_i, b'_n)$, obtenemos $A(e_i, e_n) = A(e_i, b'_n) - \alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Se obtiene así una base canónica $e = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ de V en la que $A(e_i, e_j) = \delta_{ij} A(e_i, e_i)$, con $A(e_i, e_i) = 1$ si $i \leq n-1$ y entonces $A(e_n, e_n) = |[A]_e| > 0$ (pues $[A]_e = S^{\rm tr}[A]_{B'} S$ y $|[A]_e| = |S|^2 |[A]_{B'}| > 0$). La forma cuadrática es pues definida positiva.

Aplicaciones:
1) Clasificación de puntos críticos:
Consideremos un campo escalar $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivable a segundo orden orden en un entorno de un punto crítico $\vec{r}_0$ donde $\frac{\partial G}{\partial x_i}|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. El polinomio de Taylor de segundo orden de $\Delta G(\vec{r}) = G(\vec{r}) - G(\vec{r}_0)$ alrededor de $\vec{r}_0$ es una forma cuadrática en $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$:

$$\Delta G = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}|_{\vec{r}=\vec{r}_0} \Delta x_i \Delta x_j + R_3 = \frac{1}{2}(\Delta\vec{r}) H (\Delta\vec{r})^t + R_3$$

donde H es una matriz simétrica de $n\times n$, denominada matriz *Hessiana*, de elementos

$$H_{ij}=\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_j}|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$$

y R_3 es el resto ($\lim_{\vec{r}\to\vec{r}_0} R_3/|\vec{r}-\vec{r}_0|^2=0$). Llevando la forma cuadrática anterior a una forma canónica (ya sea completando cuadrados o diagonalizando la matriz H), obtenemos

$$\Delta G=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a'_i(\Delta x'_i)^2+R_3$$

Si $a'_i>0$ para $i=1,\ldots,n$, $\Delta G>0$ para $|\Delta\vec{r}|$ suf. pequeño y el punto crítico es un mínimo local o relativo.
Si $a'_i<0$ para $i=1,\ldots,n$, $\Delta G<0$ para $|\Delta\vec{r}|$ suf. pequeño y el punto crítico es un máximo local o relativo.
Y si existen a'_i positivos y negativos, se trata de un punto silla ("saddle point").
Finalmente, si algunos a'_i son nulos y $a'_i\geq 0$ para $i=1,\ldots,n$ (o $a'_i\leq 0$ para $i=1,\ldots,n$) el presente criterio no decide y es necesario un desarrollo a orden más alto (que puede también no ser concluyente) o bien un análisis alternativo.
Por lo tanto, podemos clasificar el punto crítico en forma inmediata conociendo los autovalores de la matriz H (de $n\times n$), o bien simplemente completando cuadrados y observando los signos de los coeficientes diagonales a_i. El último método es en general más sencillo (pues no requiere determinar raíces de ninguna ecuación) pero el primero tiene la ventaja de determinar a la vez (mediante los autovectores de H) n direcciones *ortogonales* en las que la forma cuadrática tiene la forma canónica (y por lo tanto conocer las direcciones ortogonales en las que ΔG es positivo ($a'_i>0$) o negativo ($a_i<0$)). (Ver práctica para más detalles).

Notemos también que si definimos $f_{\vec{r}_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como

$$f_{\vec{r}_0}(t)=G(\vec{r}_0+t\Delta\vec{r})$$

entonces

$$f''_{\vec{r}_0}(0)=\sum_{i,j}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_j}|_{\vec{r}=\vec{r}_0}\Delta x_i\Delta x_j=(\Delta\vec{r})H(\Delta\vec{r})^t$$

lo cual es una forma cuadrática en $\Delta\vec{r}$ definida por la matriz simétrica H. Si H es definida positiva $\Rightarrow f_{\vec{r}_0}(t)$ es cóncava hacia arriba en $t=0$ para *cualquier dirección* $\Delta\vec{r}$, mientras que si es definida negativa, $f_{\vec{r}_0}(t)$ será cóncava hacia abajo para cualquier dirección $\Delta\vec{r}$. En el caso general, la concavidad dependerá de la dirección de $\Delta\vec{r}$.

2) Clasificación de curvas de nivel de formas cuadráticas. Consideremos la ecuación

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j=C$$

que puede reescribirse como

$$\vec{r}A(\vec{r})^t=C$$

con $\vec{r}=(x_1,\ldots,x_n)$ y A la matriz (real) de elementos a_{ij}, que puede suponerse siempre simétrica ($a_{ij}=a_{ji}$). Llevándola a una forma canónica obtenemos la ecuación equivalente

$$\sum_{i=1}^{n} a'_i {x'_i}^2=C$$

con los x'_i relacionados linealmente con los x_i. Si todos los a'_i son positivos (y $C>0$) la ecuación anterior determina un *elipsoide*, mientras que si los a'_i tienen signos distintos la ec. determina un hiperboloide. Si la forma canónica se obtiene diagonalizando la matriz A, los autovectores pueden elegirse normalizados y ortogonales, en cuyo caso las variables x'_i serán las coordenadas a lo largo de ejes ortogonales en los que la forma cuadrática toma la forma canónica (ejes principales). (véase práctica para más detalles).

Ejemplo: Consideremos

$$G(x,y)=x^2+y^2+2\alpha xy$$

$(0,0)$ es un pto. crítico de G y la matriz H de derivadas segundas es $H=2\binom{1\ \alpha}{\alpha\ 1}$. Sus autovalores son

$$\lambda_\pm = 2(1\pm\alpha)$$

(obtenidos de la ec. $|H-\lambda I_2| = (2-\lambda)^2-4\alpha^2=0$). Por lo tanto, Si $|\alpha|<1$ ambos autovalores son positivos y $(0,0)$ es un mínimo de G (en este caso mínimo absoluto). En cambio, si $|\alpha|>1$, un autovalor es positivo y el otro negativo (por ej., si $\alpha>1$, $\lambda_+>0$, $\lambda_-<0$), por lo que $(0,0)$ es en este caso un punto silla. Las componentes de los autovectores normalizados (y por su puesto ortogonales) de H son $[v_\pm]_e = \binom{\pm 1}{1}/\sqrt{2}$, por lo que $S=\binom{1\ -1}{1\ \ 1}/\sqrt{2}$ y podemos escribir

$$G(x,y) = (1+\alpha)x'^2 + (1-\alpha)y'^2$$

con $\binom{x'}{y'} = S^{-1}\binom{x}{y} = \binom{x+y}{x-y}/\sqrt{2}$, como puede verificarse directamente.
Si G representa la energía potencial de un sistema físico dependiente de dos coordenadas x,y en las cercanías de un punto estacionario, vemos pues que el sistema será estable sólo si $|\alpha|<1$. Si $\alpha>0$, la estabilidad del sistema en la dirección de e'_2 disminuye al aumentar α, tornándose inestable para $\alpha>1$.

Cabe destacar, no obstante, que la misma conclusión puede obtenerse simplemente completando cuadrados, lo cual conduce a

$$G(x,y) = (x+\alpha y)^2 + y^2(1-\alpha^2)$$

Vemos pues que el coeficiente de y^2 es positivo si $|\alpha|<1$ y negativo si $|\alpha|>1$, mientras que el primero es siempre positivo.

Si consideramos ahora la ec.

$$x^2+y^2+2\alpha xy = C$$

el mismo análisis conduce a que para $C>0$, la ec. anterior representa una elipse si $|\alpha|<1$, con ejes principales inclinados 45 grados respecto de los originales (y radios de longitud $1/\sqrt{1\pm\alpha}$ para $C=1$), mientras que si $|\alpha|>1$ la ec. representa una hipérbola.
Ejemplo: Consideremos

$$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz$$

que ya fue analizado. $(0,0,0)$ es claramente un punto crítico. Completando cuadrados, se obtiene

$$G(x,y,z) = (x+y+z)^2-(y+z)^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2-2yz = x'^2+2y'^2-2z'^2$$

donde $x'=x+y+z$, $z'=(z+y)/2$, $y'=(y-z)/2$, lo que implica que $(0,0,0)$ es un punto silla. El mismo resultado se obtiene de los autovalores de la matriz $H=2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, que son $\lambda_1=2>0$, $\lambda_2=2+2\sqrt{2}>0$, $\lambda_3=2-2\sqrt{2}<0$.
La ecuación

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz = C$$

corresponde, por lo tanto, a un hiperboloide (de una hoja para $C>0$).

Ejemplo: Consideremos la función $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $\quad (X=(x_1,\ldots,x_n)^t)$

$$T(X) = \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j + 2\sum_i r_i x_i$$

con $A_{ij}=A_{ji}$. Asumiendo que la matriz de coeficientes $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible, podemos reescribir T como

$$T(X) = X^tAX + (R^tX+X^tR) = Y^TAY - R^tA^{-1}R$$

donde $X^t=(x_1,\ldots,x_n)$, $R^t=(r_1,\ldots,r_n)$ y $Y=X+C$, con $C=A^{-1}R$. Es decir, $T(X)$ es una forma cuadrática en $Y=X+A^{-1}R$ (o sea, $y_i = x_i+\sum_j A^{-1}_{ij}r_j$) más una constante $R^tA^{-1}R$.

Si A es singular, podemos econtrar C tal que $AC=R$ sólo si $R\in EC(A)$ (espacio columna de A). En tal caso $T=Y^tAY-C^tR$ sigue siendo una forma cuadrática en $Y=X+C$, a menos de una constante $-C^tR$.