Algebra Lineal: Aplicaciones a la Física, Curso 2012

5. Transformaciones lineales

Una transformación lineal (TL) es una función $F : V \to V'$ entre dos espacios vectoriales V, V' *sobre el mismo cuerpo* K que satisface

$$i) \;\; F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) \;\; \forall \, v_1, v_2 \in V$$

$$ii) \;\; F(\alpha v) = \alpha F(v) \;\; \forall \alpha \in K, \; v \in V$$

es decir, $F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) \; \forall \; \alpha_1, \alpha_2 \in K$ y $v_1, v_2 \in V$. F es pues un morfismo entre espacios vectoriales. Si $V' = V$, F es un endomorfismo y en tal caso se denomina también *operador lineal.*

Propiedades fundamentales:

I) $F(0) = 0$ (el primer 0 es el vector nulo de V y el segundo el vector nulo de V')

Dem.: $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0) \Rightarrow F(0) = 0$

II) $F(-v) = -F(v)$

Dem.: $0 = F(0) = F(v + (-v)) = F(v) + F(-v)$, de donde $F(-v) = F(v)$.

(También pueden demostrarse utilizando ii))

Ejemplos (probar como ej.):

1) $F : V \to V$ definida por $F(v) = \alpha v$, con $\alpha \in K$, es TL $\forall \alpha \in K$ (incluso $\alpha = 0$).

Si $\alpha = 1 \Rightarrow F$ es la *identidad* ($F(v) = v \; \forall v \in V$), denotada por I.

Si $\alpha = 0 \Rightarrow F$ es la TL *nula* ($F(v) = 0 \; \forall \; v \in V$).

2) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x + y, 2y + x)$ es TL.

También lo es $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (x + y, 2y + x, 3x + y)$.

3) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x + y^2, 2y + x)$ no es TL. Tampoco lo es $F(x, y) = (1 + x + y, 2y)$.

4) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ es TL $\forall \; a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

5) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $F(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$ es TL $\forall \; a_{ij} \in \mathbb{R}$.

6) $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por $F(A) = A^t$ (traspuesta) es TL.

También lo es $F(A) = B \cdot A$, con B matriz real fija de $n \times n$, y $G(A) = B \cdot A + A \cdot C$.

7) $F : C \to C$ ($C(\mathbb{R})$ es el subespacio de funciones reales continuas) dada por $[F(f)](x) = \int_0^x f(t)dt$, es TL.

8) Si $D \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es el subespacio de funciones reales derivables, $F : D \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dada por $F(f) = f'$, es también TL.

Más propiedades fundamentales:

III) Si S es un subespacio de V, la imagen de S por f, $F(S) = \{F(v) | v \in S\}$, es un subespacio de V'.

En particular, si $S = V$, el subespacio $F(V)$ se denomina *imagen* de F y se denota $I(F)$.

Dem.: Si $v_1, v_2 \in S \Rightarrow F(v_1) + F(v_2) = F(v_1 + v_2) \in F(S)$ pues $v_1 + v_2 \in S$.

Si $\alpha \in K$ y $v \in S \Rightarrow \alpha F(v) = F(\alpha v) \in F(S)$ pues $\alpha v \in S$.

En particular, $0 \in F(S)$ ($F(0) = 0$)

IV) La pre-imagen de un subespacio S' de V', $S = \{v \in V | F(v) \in S'\}$ es un subespacio de V.

Dem.: $0 \in S$ pues $F(0) = 0 \in S'$.

Si $v_1, v_2 \in S \Rightarrow v_1 + v_2 \in S$ pues $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) \in S'$

Si $\alpha \in K$ y $v \in S \Rightarrow \alpha v \in S$ pues $F(\alpha v) = \alpha F(v) \in S'$.

En particular, la pre-imagen de $\{0\}$ (subespacio nulo de V') se denomina *núcleo* o *espacio nulo* de F y se denota $N(F)$: $N(F) = \{v \in V | F(v) = 0\}$.

V) Si $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$, con $\alpha_i \in K$ y $v_i \in V \Rightarrow F(v) = F(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i F(v_i)$

Esto puede demostrarse fácilmente por inducción (para los que no lo ven obvio).

Esta propiedad implica que la imagen del subespacio $\overline{C}$ generado por un subconjunto de vectores $C = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ es el subespacio $\overline{F(C)}$ generado por la imagen $F(C) = \{F(v_1), \ldots, F(v_m)\} \subset V'$:

$$F(\overline{C}) = \overline{F(C)}$$

En particular, si V es finitamente generado y $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$ es una base de V, $I(F) = F(\overline{B}) = \overline{F(B)}$.

En otras palabras, la imagen $I(F)$ es el subespacio generado por los n vectores $F(b_1), \ldots, F(b_n)$ de V'.

Esto implica que una transformación lineal *queda completamente determinada por los vectores que asigna a los elementos de una base*, es decir, por los n vectores $F(b_1), \ldots, F(b_n)$:

Si $v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ y $F(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(e_i)$.
Nótese también que si $v_1, \ldots, v_m$ son L.D. (linealmente *dependientes*) $\Rightarrow$ los vectores $F(v_1), \ldots, F(v_m)$ son también L.D.: Si $0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$, con algún $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow 0 = F(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i F(v_i)$.

VI) Si V es finitamente generado entonces

$$\dim N(F) + \dim I(F) = \dim V$$

Dem.: Sea $\{b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n\}$ base de V tal que $\{b_1, \ldots, b_m\}$ sea base de $N(F)$ ($F(b_i) = 0$ si $i \leq m$).
Si $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in V \Rightarrow$

$$F(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(b_i) = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i F(b_i)$$

pertenece al espacio generado por $F(b_{m+1}) \ldots, F(b_n)$. Además, $F(b_{m+1}), \ldots, F(b_n)$ son L.I. pues si

$$0 = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i F(b_i) = F(\sum_{i=m+1}^n \alpha_i b_i)$$

el vector $\sum_{i=m+1}^n \alpha_i b_i \in N(F)$ y por tanto, $\sum_{i=m+1}^n \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i$. Pero por independencia lineal de los b_i, debe ser $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, por lo que $F(b_{m+1}), \ldots, F(b_n)$ son L.I.
La dimensión de la imagen es por lo tanto $n-m$, y se cumple entonces $\dim N(F) + \dim I(F) = m + (n-m) = n = \dim V$. La dimensión de la imagen $I(F)$ se denomina *rango* de F y la dimensión del espacio nulo $N(F)$ *nulidad* de F.

Ejemplos simples:
1) $F : V \to V$ dada por $F(v) = \alpha v$
Si $\alpha = 0$, $N(F) = V$, $I(F) = \{0\}$. Si dim $V = n$, dim $N(F)$+dim $I(F) = n + 0 = n$.
Si $\alpha \neq 0$, $N(F) = \{0\}$, $I(F) = V$. Si dim $V = n$, dim $N(F)$+dim $I(F) = 0 + n = n$.
2) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x, 0)$. $N(F) = \{(0, y) | y \in \Re\}$, $I(F) = \{(x, 0) | x \in \Re\}$.
dim $N(Ff)$+dim $I(F)$=1+1=2=dim V.
3) $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por $F(A) = A^t$. $N(F) = \{0 \equiv \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $I(F) = \mathbb{R}^2$; dim $N(F)$+dim$I(F)$=0+4=4

5.1 Representación matricial de funciones lineales:

Sea $F : V \to V'$, con V, V' finitamente generados de dimensión n y m respect. Sea $B = (b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada de V y $B' = (b'_1, \ldots, b'_m)$ una base ordenada de V'. Podemos escribir

$$F(b_i) = \sum_{j=1}^m T_{ji} b'_j, \quad i = 1, \ldots, n$$

donde $T_{ji} \in K$ son las coordenadas de $F(b_i)$ en la base B' de V'. Por lo tanto, si $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ y

$$F(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m T_{ji} b'_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n T_{ji} \alpha_i) b'_j = \sum_{j=1}^m \alpha'_j b'_j$$

con $\alpha'_j = \sum_{i=1}^n T_{ji} \alpha_i$, $j = 1, \ldots, m$. Es decir, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \ldots \\ \alpha'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & \ldots & T_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{m1} & \ldots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

que se escribe en forma concisa como

$$[F(v)]_{B'} = [F]_{B'}^{B} [v]_B$$

donde

$$[F(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \ldots \\ \alpha'_m \end{pmatrix}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

son las coordenadas de $F(v)$ en la base B' y de v en la base B, y

$$[F]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{m1} & \dots & T_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ [F(b_1)]_{B'} & \dots & [F(b_n)]_{B'} \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

es la matriz de $m \times n$ que representa la transformación lineal B respecto de las bases B y B' de V y V'. Esta matriz depende de las bases elegidas, pero una vez elegida las bases es claramente *única*, ya que la función lineal queda completamente determinada por los vectores que asigna a los elementos de una base. En particular, si $V = V'$ y $B = B'$,

$$[F(v)]_B = [F]_B^B [v]_B$$

Notemos que la función identidad $I : V \to V$ definida por $I(v) = v$ queda representada por la matriz identidad I_n: $[I]_B^B = I_n$. Por simplicidad, denotaremos a $[F]_B^B$ también como $[F]_B$ cuando quede claro que estamos trabajando con operadores lineales representados en una misma base.

Ejemplo 1: Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2x + y, 4y + 3x)$. En la base canónica $B = (b_1, b_2)$, $b_1 = (1, 0)$, $b_2 = (0, 1)$, tenemos $F(b_1) = (2, 3) = 2b_1 + 3b_2$, $F(b_2) = (1, 4) = b_1 + 4b_2$, y la matriz que representa a F en esta base es

$$[F]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2: Reflexión respecto del eje x en $\mathbb{R}^2$. Si $F(v)$ es el vector obtenido al reflejar v respecto del eje x, tenemos (recordar dibujo) $F(b_1) = b_1$, $F(b_2) = -b_2$ y por lo tanto

$$[F]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3: Reflexión respecto de la recta de ec. $y = x$ en $\mathbb{R}^2$: Si $F(v)$ es el vector obtenido al reflejar v respecto de la recta $y = x$, tenemos $F(b_1) = b_2$, $F(b_2) = b_1$ y por lo tanto

$$[F]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4: Rotación de ángulo θ en $\mathbb{R}^2$. Si $F(v)$ es el vector obtenido al rotar v un ángulo θ antihorario, tenemos (recordar dibujo) $F(b_1) = \cos(\theta)b_1 + \sin(\theta)b_2$, $F(b_2) = -\sin(\theta)b_1 + \cos(\theta)b_2$ y por lo tanto

$$[F]_B^B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5: Rotación de ángulo θ en $\mathbb{R}^3$ alrededor del eje z. Si $F(v)$ es el vector obtenido al rotar v un ángulo θ antihorario alrededor del eje z, tenemos, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, $F(b_1) = \cos(\theta)b_1 + \sin(\theta)b_2$, $F(b_2) = -\sin(\theta)b_1 + \cos(\theta)b_2$ y $F(b_3) = b_3$. Por lo tanto

$$[F]_B^B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6: Sea P_n el espacio de polinomios de grado $\leq n$, y sea $D : P_2 \to P_1$ el operador derivación restringido a polinomios de grado ≤ 2 con codominio P_1. Sea $(b_1 = 1, b_2 = t, b_3 = t^2)$ la base "canónica" de P_2 y $(b'_1 = 1, b'_2 = t)$ la de P_1. Tenemos $D(b_1) = 0$, $D(b_2) = b'_1$, $D(b_3) = 2b'_2$ y por lo tanto

$$[D]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notemos que estas representaciones implican $F(x, y) = (x, -y)$ en (2), $F(x, y) = (y, x)$ en (3), $F(x, y) = (x\cos(\theta) + y\sin(\theta), -x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$ en (4), $F(x, y, z) = (x\cos(\theta) + y\sin(\theta), -x\sin(\theta) + y\cos(\theta), z)$ en (5) y $D(x.1 + yt + zt^2) = y.1 + 2zt$ en (6).

5.2 Cambio de base

Consideremos primero el caso de endomorfismos $F: V \to V$, y sean $B = (b_1, \ldots, b_n)$, $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n)$ dos bases ordenadas de V. Tenemos $[v]_B = S[v]_{\tilde{B}}$, $[F(v)]_B = S[F(v)]_{\tilde{B}}$, siendo S la matriz de cambio de base (su columna i es el vector de coordenadas $[\tilde{b}_i]_B$). Por lo tanto, $\forall\ v \in V$,

$$[F(v)]_{\tilde{B}} = S^{-1}[F(v)]_B = S^{-1}([F]_B^B[v]_B) = S^{-1}([F]_B^B S[v]_{\tilde{B}}) = (S^{-1}[F]_B^B S)[v]_{\tilde{B}}$$

es decir, comparando con $[F(v)]_{\tilde{B}} = [F]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}[v]_{\tilde{B}}$,

$$[F(v)]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = S^{-1}[F]_B^B S$$

que implica también $[F]_B^B = S[f]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} S^{-1}$.
La matrices que representan a un endomorfismo F en diferentes bases son entonces *semejantes* (A de $n \times n$ es semejante a B de $n \times n$ si $A = S^{-1}BS$, con S de $n \times n$ no singular). Las matrices semejantes poseen **el mismo detereminante** y **la misma traza**:

$$\mathrm{Det}[A] = \mathrm{Det}[S^{-1}BS] = \mathrm{Det}[S^{-1}]\mathrm{Det}[B]\mathrm{Det}[S] = \mathrm{Det}[B]$$

$$\mathrm{Tr}[A] = \mathrm{Tr}[S^{-1}BS] = \mathrm{Tr}[BSS^{-1}] = \mathrm{Tr}[B]$$

Recordemos que la traza se define como **la suma de todos los elementos diagonales de una matriz**:

$$\mathrm{Tr}[A] = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

y satisface $\mathrm{Tr}[AB] = \mathrm{Tr}[BA]\ \forall\ A, B$ de $n \times n$: $\sum_{i,j} A_{ij}B_{ji} = \sum_{i,j} B_{ij}A_{ji}$.

Las matrices que representan a un mismo operador lineal en distintas bases tienen pues *el mismo determinante y la misma traza*. Estas cantidades **permanecen invariantes** frente a cambios de fase y constituyen pues propiedades del operador, no dependientes de la representación.

La matriz S de cambio de base puede reescribirse en este contexto como la matriz que representa la identidad I ($I : V \to V$ definida por $I(v) = v\ \forall V \in V$) entre dos bases diferentes:

$$[v]_{\tilde{B}} = [I(v)]_{\tilde{B}} = [I]_{\tilde{B}}^B[v]_B$$

Comparando con $[v]_{\tilde{B}} = S^{-1}[v]_B$, tenemos pues

$$S^{-1} = [I]_{\tilde{B}}^B, \quad S = [I]_B^{\tilde{B}}$$

Por lo tanto, en el caso de endomorfismos podemos escribir

$$[F]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = [I]_{\tilde{B}}^B[F]_B^B[I]_B^{\tilde{B}}$$

Nótese también que la transformación lineal $G : V \to V$ definida por $G[b_i] = \tilde{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$, puede representarse en la base B por la matriz

$$[G]_B^B = [I]_{\tilde{B}}^B = S$$

mientras que $[G]_{\tilde{B}}^B$ es obviamente la matriz identidad I_n.

Ejemplo 1: La matriz que representa a una reflexión F respecto de la recta de ec. $y = x$ en $\mathbb{R}^2$, obtenida anteriormente, se relaciona con aquella que representa a la reflexión respecto del eje x mediante un cambio de base, y son por lo tanto semejantes. Si $B = (b_1, b_2)$ es la base canónica, respecto de la base $\tilde{b}_1 = (b_1 + b_2)/\sqrt{2}$, $\tilde{b}_2 = (-b_1 + b_2)/\sqrt{2}$ (vectores unitarios paralelos a las rectas de ec. $y = x$ y $y = -x$) tenemos $F(\tilde{b}_1) = \tilde{b}_1$, $F(\tilde{b}_2) = -\tilde{b}_2$. Por lo tanto,

$$[F]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La base $\tilde{B}$ se relaciona con la base canónica mediante la matriz

$$S = [I]_B^{\tilde{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $S^{-1} = S^t = [I]^B_{\tilde{B}}$. Por lo tanto,

$$[F]^B_B = S[F]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}} S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es el resultado obtenido anteriormente. Nótese que la matriz no es diagonal en la base canónica, pero si lo es en la base $\tilde{B}$.

Ejemplo 2: Construir la matriz que representa a una reflexión F respecto de una recta inclinada un ángulo θ (antihorario) respecto del eje x, en R^2. Respecto de la base formada por $\tilde{b}_1 = \cos(\theta)b_1 + \sin(\theta)b_2$, $\tilde{b}_2 = -\sin(\theta)b_1 + \cos(\theta)b_2$, tenemos nuevamente y por definición de reflexión,

$$[F]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La base $\tilde{B}$ se relaciona con la base canónica B mediante la matriz de rotación

$$S = [I]^{\tilde{B}}_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

con $S^{-1} = S^t = [I]^B_{\tilde{B}}$. Por lo tanto,

$$[F]^B_B = S[f]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}} S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Nótese que existe una base ($\tilde{B}$) donde la transformación queda representada por una simple matriz diagonal.

Caso general: Llamemos $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n)$ una nueva base de V y $\tilde{B}' = (\tilde{b}'_1, \ldots, \tilde{b}'_m)$ una nueva base de V', definidas por matrices de cambio de base S y S' respectivamente ($S = [I]^{\tilde{B}}_B$, $S' = [I]^{\tilde{B}'}_{B'}$). Dado que $[v]_B = S[v]_{\tilde{B}}$ y $[F(v)]_{B'} = S'[F(v)]_{\tilde{B}'}$, tenemos

$$[F(v)]_{\tilde{B}'} = S'^{-1}[F(v)]_{B'} = S'^{-1}[F]^B_{B'}(S[v]_{\tilde{B}}) = (S'^{-1}[F]^B_{B'}S)[v]_{\tilde{B}}$$

y por lo tanto, $[F(v)]_{\tilde{B}'} = [F]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}'}[v]_{\tilde{B}}$, con

$$[F]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}'} = S'^{-1}[F]^B_{B'}S = [I]^{B'}_{\tilde{B}'}[F]^B_{B'}[I]^{\tilde{B}}_B$$

Nótese que $[F]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}'}$ y $[F]^B_{B'}$ son de $m \times n$, S' es de $m \times m$ y S de $n \times n$.

Ejemplo: Sea $D : P_2 \to P_1$ la función derivación restringida a polinomios de grado ≤ 2 con codominio P_1 y sea $B = (1, t, t^2)$ la base canónica de P_2, $B' = (1, t)$ la base canónica de P_1, $\tilde{B} = (1, 1+t, 1+t+t^2/2)$ y $\tilde{B}' = (1, 1+t)$. Tenemos

$$[D]^B_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, S = [I]^{\tilde{B}}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, S' = [I]^{\tilde{B}'}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $S'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto,

$$[D]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}'} = S'^{-1}[D]^B_{B'}S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo cual es también obvio a partir de la definición de D.

5.3 Composición (Producto) de operadores lineales

Sea $F : V \to V'$ y $G : V' \to V''$ dos transformaciones lineales. La composición o producto $(GF) : V \to V''$ se define por

$$(GF)(v) = (G \circ F)(v) = G(F(v))$$

El producto de transformaciones lineales es una transformacíon lineal:

$$(GF)(v_1 + v_2) = G(F(v_1 + v_2)) = G(F(v_1) + F(v_2)) = G(F(v_1)) + G(F(v_2)) = (GF)(v_1) + (GF)(v_2)$$

$$(GF)(\alpha v) = G(F(\alpha v)) = G(\alpha F(v)) = \alpha G(F(v)) = \alpha(GF)(v)$$

Para espacios finitamente generados, la matriz $[GF]_{B''}^{B}$ que representa a GF en las bases B, B'' de V y V'', es el *producto* de las matrices $[G]_{B''}^{B'}$ y $[F]_{B'}^{B}$ que representan a F y G en bases B', B'' y B, B', siendo B' una base de V':

$$[GF]_{B''}^{B} = [G]_{B''}^{B'}[F]_{B'}^{B}$$

Notemos que si las dimensiones de V, V', V'' son n, m, p respect. $\Rightarrow$ $[GF]_{B''}^{B}$ es de $p \times n$, $[G]_{B''}^{B'}$ es de $p \times m$ y $[F]_{B'}^{B}$ es de $m \times n$.
Dem.:

$$[(GF)(v)]_{B''} = [G(F(v))]_{B''} = [G]_{B''}^{B'}[F(v)]_{B'} = [G]_{B''}^{B'}([F]_{B'}^{B}[v]_B) = ([G]_{B''}^{B'}[F]_{B'}^{B})[v]_B$$

En particular, si $V = V' = V''$, con $B = B' = B''$,

$$[(GF)]_B^B = [G]_B^B[F]_B^B$$

El producto de funciones así definido es obviamente asociativo ($H(GF) = (HG)G$ para $Gf : V \to V'$, $G : V' \to V''$ y $H : V'' \to V'''$), pero en general, *no conmutativo*, aún cuando $V = V' = V''$.

Ejemplo: Consideremos la composición en $\mathbb{R}^2$ de una rotación F de $\pi/2$ antihoraria seguida de una reflexión G respecto del eje x: Tenemos, en la base canónica $B = ((1,0),(0,1))$:

$$[GF]_B^B = [G]_B^B[F]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -[H]_B^B$$

con H la reflexión respecto de la recta de ec. $y = x$ ($-H$ es la reflexión respecto de la recta de ec. $y = -x$)
Por otro lado, la composición en sentido inverso, es decir una reflexión respecto del eje x seguida de una rotación de $\pi/2$, da como resultado

$$[FG]_B^B = [F]_B^B[G]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [H]_B^B$$

Este sencillo ejemplo muestra que el producto de operadores lineales no es en general conmutativo.

En general, se define el *conmutador* de dos operadores lineales $F : V \to V$, $G : V \to V$ como

$$[F, G] = FG - GF$$

La matriz que representa el conmutador es el conmutador de las matrices que representan F y G:

$$[[F, G]]_B^B = [F]_B^B[F]_B^B - [G]_B^B[F]_B^B$$

En el ejemplo anterior, $[F, G] = 2H$ ya que $[[F, G]]_B^B = 2[H]_B^B$.

5.4 El espacio vectorial de transformaciones lineales

Consideremos dos operadores lineales $F : V \to V'$, $G : V \to V'$. La suma $(F + G) : V \to V'$ se define como

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v)$$

y es claramente una función lineal:

$$(F+G)(v_1+v_2) = F(v_1+v_2)+G(v_1+v_2) = F(v_1)+F(v_2)+G(v_1)+Gg(v_2) = (F+G)(v_1)+(F+G)(v_2)$$

$$(F+G)(\alpha v) = F(\alpha v) + G(\alpha v) = \alpha F(v) + \alpha G(v) = \alpha(F(v) + G(v)) = \alpha(F+G)(v)$$

Es fácil verificar que la suma es conmutativa ($F{+}G = G{+}F$) y asociativa ($(F{+}G){+}H = F{+}(G{+}H)$). Existe además un elementro neutro 0, que es la función nula definida por $0(v) = 0\ \forall\ v \in V$, con $F{+}0 = 0{+}F = F$. El elemento opuesto de F es entonces $-F$, definido por $-F(v) = -(F(v))$, que es también lineal. El conjunto de las funciones lineales $\{F : V \to V',\ F \text{ lineal}\}$ es pues un grupo abeliano con la operación de suma.

El producto por un escalar $\alpha \in K$, $(\alpha F) : V \to V'$ se define obviamente como

$$(\alpha F)(v) = \alpha F(v)$$

y es también una función lineal:

$$(\alpha F)(v_1 + v_2) = \alpha F(v_1 + v_2) = \alpha(F(v_1) + F(v_2)) = \alpha F(v_1) + \alpha F(v_2) = (\alpha F)(v_1) + (\alpha F)(v_2)$$

$$(\alpha F)(\beta v) = \alpha F(\beta v) = \alpha(\beta F(v)) = (\alpha\beta)F(v) = (\beta\alpha)F(v) = \beta(\alpha F)(v)$$

Es fácil verificar además que $\alpha(\beta F) = (\alpha\beta)F$, $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$, $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$, $1F = F$.

El conjunto de todas las transformaciones lineales $F : V \to V'$ es entonces *un espacio vectorial* sobre K, denominado $Hom(V, V')$ (Homomorfismos de V en V').

Notemos también que con respecto al producto (composición) de funciones, la suma verifica las propiedades distributivas $(G + H)F = GF + HF$ para $F : V \to V'$, y $G, H : V' \to V''$ y $H(F + G) = HF + HG$ para $H : V' \to V''$ y $F, G : V \to V'$. Además, por ser lineales, $\alpha(GF) = (\alpha G)F = G(\alpha F)$ para $\alpha \in K$.

La matriz que representa a $(F + G)$ en las bases B, B' es claramente la suma de matrices,

$$[F+G]^B_{B'} = [F]^B_{B'} + [G]^B_{B'}$$

y la que representa a (αF) es obviamente

$$[\alpha F]^B_{B'} = \alpha[F]^B B'$$

En efecto, $[(F{+}G)(v)]_{B'} = [F(v){+}g(v)]_{B'} = [F(v)]_{B'}{+}[G(v)]_{B'} = [F]^B_{B'}[v]_B{+}[G]^B_{B'}[v]_B = ([F]^B_{B'}{+}[G]^B_{B'})[v]_B$. $[(\alpha F)(v)]_{B'} = [\alpha F(v)]_{B'} = \alpha[F(v)]_{B'} = \alpha([F]^B_{B'}[v]_B) = (\alpha[F]^B_{B'})[v]_B$.

6. Monomorfismos, Epimorfismos e Isomorfismos

I) Un monomorfismo es una TL $F : V \to V'$ inyectiva (o sea, $F(v_1) \neq F(v_2)$ si $v_1 \neq v_2$).
F es un monomorfismo *si y sólo si* $N(F) = \{0\}$.
Dem.: Si F es un monomorfismo y $v \neq 0$, $F(v) \neq F(0) = 0 \Rightarrow N(F) = \{0\}$.
Si $N(F) = \{0\} \Rightarrow F(v_1) - F(v_2) = F(v_1 - v_2) \neq 0$ si $v_1 - v_2 \neq 0$, o sea, $F(v_1) \neq F(v_2)$ si $v_1 \neq v_2$.

Como consecuencia, dim $N(F) = 0$. Por lo tanto, si V es de dimensión finita, dim $I(F) =$ dim V.
Y como $I(F) \subset V'$, F puede ser un monomorfismo sólo si dim $V \leq$ dim V'.
Los monomorfismos **conservan la independencia lineal**: Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son vectores LI de V y F es un monomorfismo $\Rightarrow \{F(v_1), \ldots, F(v_m)\}$ son vectores LI de V'. Dem.: Si

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F(v_i) = F(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i)$$

entonces $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \in N(F)$. Como $N(F) = \{0\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = 0$, lo que implica $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, m$ por ser los v_i LI. Por lo tanto, $\{F(v_1), \ldots, F(v_m)\}$ son LI
En particular, si $B = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base de un espacio V finitamente generado y $F : V \to V'$ es un monomorfismo, $(F(b_1), \ldots, F(b_n))$ es una **base** de $I(F)$.

II) Un epimorfismo es una TL $F : V \Rightarrow V'$ suryectiva ($I(F) = V'$). Si V' es de dimensión finita $\Rightarrow F$ es un epimorfismo si y sólo si dim $I(F) =$ dim V'.
Como dim $I(F) \leq$ dim V, F puede ser un epimorfismo sólo si dim $V' \leq$ dim V.

III) Un isomorfismo es una TL biyectiva, es decir, es a la vez un monomorfismo y un epimorfismo.
En espacios de dimensión finita, un isomorfismo puede entonces existir sólo si dim V=dim V' (pues por ser monomorfismo, dim $V \leq$ dim V' y por ser epimorfismo, dim $V' \leq$ dim V.)
Si $B = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base de V y $F : V \to V'$ es un isomorfismo, $\{F(b_1), \ldots, F(b_n)\}$ es una base de V', pues son LI (por ser F monomorfismo) y generan V' (por ser F epimorfismo). Los isomorfismos transforman entonces bases en bases.
Si $V = V'$, un operador que es un isomorfismo se dice *no singular* o automorfismo. En caso contrario se dice *singular*.

Dados dos espacios V, V' sobre el mismo cuerpo K, se dice que V es *isomorfo* a V' si existe un isomorfismo $F : V \to V'$. En tal caso existe pues una correspondencia uno a uno entre los elementos de V y V'.
Dos espacios vectoriales V, V' de dimensión finita sobre el mismo cuerpo K son isomorfos *si y sólo si* dim $V =$ dim V'.
Dem.: Ya hemos demostrado que si $\exists$ un isomorfismo entre V y $V' \Rightarrow$ dim V=dim V'.
Por otro lado, si dim $V =$ dim $V' = n$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $B' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ son bases de V y V', la TL definida por

$$F(b_i) = b'_i, \;\; i = 1, \ldots, n$$

(o sea $F(B) = B'$) es un isomorfismo. En efecto, es suryectiva, pues $I(F) = F(\overline{B}) = \overline{F(B)} = \overline{B'} = V'$
(o sea, si $v' \in V' \Rightarrow v' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b'_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(b_i) = F(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i) \in I(F)$), por lo que $I(F) = V'$).
Esto implica que F es también un monomorfismo pues dim $N(F) =$ dim V-dim $I(F)$ =dim V-dim $V' = 0$, lo que implica $N(F) = \{0\}$.

Notemos finalmente que si dim $V =$ dim $V' = n$ y $F : V \to V'$ es una TL, son equivalentes:
a) F es un isomorfismo; b) F es monomorfismo; c) F es epimorfismo
como consecuencia de la relación $\dim N(F) + \dim I(F) = \dim V$. En efecto, a) implica b)+c) (y viceversa) por definición, b) implica c) ya que en tal caso $N(F) = \{0\}$ y por lo tanto dim $I(F) = n$, y c) implica b) por la misma propiedad (pues si dim $I(F) = n \Rightarrow$ dim $N(F) = 0$ y por lo tanto $N(F) = \{0\}$).

No obstante, si V es de dimensión infinita, un operador lineal $F : V \to V'$ puede ser monomorfismo sin ser epimorfismo y viceversa. Pro ejemplo, si P es el espacio de polinomios reales, $D : P \to P$ definido por $D(p(x)) = p'(x)$ (derivada) no es monomorfismo ($D(1) = 0$) pero es epimorfismo (probar como ejercicio). Y el operador $S : P \to P$ definido por $S(p(x)) = \int_0^x p(t)dt$ es monomorfismo (pues $N(S) = \{0\}$) pero no es epimorfismo (probar como ej.).

IV) Si $F : V \to V'$ es un isomorfismo $\Rightarrow$ la transformación inversa $F^{-1} : V' \to V$, definida por $F^{-1}(v') = v$, con v el único vector $\in V$ tal que $F(v) = v'$, es lineal y es un isomorfismo.
Dem.: Si F es isomorfismo, la inversa F^{-1} es obviamente una función bien definida.
Si $F(v_1) = v_1'$, $F(v_2) = v_2' \Rightarrow F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) = v_1' + v_2'$, lo que implica $F^{-1}(v_1' + v_2') = v_1 + v_2 = F^{-1}(v_1') + Ff^{-1}(v_2')$.
Si $F(v) = v'$ y $\alpha \in K \Rightarrow F(\alpha v) = \alpha F(v) = \alpha v'$, lo que implica $F^{-1}(\alpha v') = \alpha v = \alpha F^{-1}(v')$.
F^{-1} es por lo tanto una TL.
Además, F^{-1} es un monomorfismo, pues $N(F^{-1}) = \{0\}$ y es un epimorfismo pues si $v \in V$, $v = F^{-1}(v')$, con $v' = F(v)$, por lo que $I(F^{-1}) = V$.
Como consecuencia de la definición, $F(F^{-1}(v')) = v' \ \forall \ v' \in V'$ y $F^{-1}(F(v)) = v \ \forall \ v \in V$. Por lo tanto,

$$FF^{-1} = I_{V'}, \quad F^{-1}F = I_V$$

donde $I_{V'} : V' \to V'$ denota la identidad en V' y $I_V : V \to V$ aquella en V. Para V y V' de dimensión finita, las matrices correspondientes satisfacen

$$[FF^{-1}]_{B'} = [F]^B_{B'}[F^{-1}]^{B'}_B = I_n, \qquad [F^{-1}F]_B = [F^{-1}]^{B'}_B[F]^B_{B'} = I_n$$

donde $I_n = [I_{V'}]_{B'} = [I_V]_B$ es la matriz identidad de $n \times n$. Por lo tanto, $[F^{-1}]^{B'}_B$ *es la matriz inversa* de $[F]^B_{B'}$:

$$[F^{-1}]^{B'}_B = ([F]^B_{B'})^{-1}$$

Una TL $F : V \to V'$ entre espacios de dimensión finita es pues un isomorfismo *si y sólo si* está representada por matrices $[F]^B_{B'}$ cuadradas *no singulares* ($\text{Det}[F]^B_{B'} \neq 0$).
Dem.: Si es isomorfismo, por lo visto anteriormente $[F]^B_{B'}$ es cuadrada e invertible y por lo tanto no singular. Y si $[F]^B_{B'}$ es cuadrada no singular, la única solución de $[F]^B_{B'}[v]_B = 0$ es $[v]_B = 0$, es decir, $v = 0$. Esto implica que $N(F) = \{0\}$ y $\Rightarrow F$ es monomorfismo y por lo tanto isomorfismo.
Si $V = V'$, F es un operador no singular sii $[F]_B$ es una matriz no singular. En tal caso $[F^{-1}]_B = [F]_B^{-1}$.

Recordemos que la inversa de una matriz no singular A ($\text{Det}[A] \neq 0$) puede obtenerse como

$$A^{-1} = C/\text{Det}[A], \ \text{ con } \ C_{ij} = (-1)^{i+j}\text{Det}[M_{ji}]$$

donde Det denota el determinante y C la matriz de cofactores traspuesta, siendo M_{ji} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida al suprimir la fila j y columna i de A.
Por ejemplo, si A es de 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1): Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K con dim $V = n$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base ordenada de V, la función $R : V \to K^n$ dada por

$$R(v) = [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

donde $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, es un *isomorfismo*.
En efecto, hemos demostrado anteriormente que $R(v)$ es lineal ($[\alpha v]_B = \alpha[v]_B$ y $[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B$). Además $N(R) = \{0\}$ (pues $[v]_B = 0$ (vector columna nulo) si y sólo si $v = 0$). Por lo tanto es un isomorfismo. Esto implica en particular que un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_m \in V$ serán LI si y sólo si los correspondientes vectores columna $[v_1]_B, \ldots, [v_m]_B \in K^n$ son LI.

Ejemplo 2): Si dim $V = n$, dim $V' = m$ y B, B' son bases ordenadas de V y V', la función $H : Hom(V, V') \to K^{m\times n}$ dada por $H(F) = [F]^B_{B'}$ es un isomorfismo.
En efecto, H es lineal (ya que $[(F + G)]^B_{B'} = [F]^B_{B'} + [G]^B_{B'}$ y $[\alpha F]^B_{B'} = \alpha[F]^B_{B'}$). Además, H es inyectiva, pues $N(H) = \{0\}$ (0 denota la función nula, representada en cualquier base por la matriz nula de $m \times n$ (sus elementos son todos 0)) y es también suryectiva, pues una matriz arbitraria $T \in K^{m\times n}$ corresponde a la transformación lineal definida por $F(b_i) = \sum_{j=1}^m T_{ji}b_j'$, $i = 1, \ldots, n$. Es decir, $I(H) = K^{m\times n}$. Esto implica que dim $Hom(V, V') = \text{dim } K^{m\times n} = m.n$.

La dimensión de la imagen de F puede calcularse evaluando el **rango** de la matriz $T = [F]^B_{B'}$ de $m \times n$ (es decir, el número de columnas (o filas) LI) en *cualquier* par de bases B, B', ya que esto será equivalente al número de vectores $F(b_i)$ LI. Del mismo modo, la imagen $I(F)$ puede obtenerse a partir del espacio columna de T (es decir, el espacio generado por las columnas de T) y el núcleo $N(F)$ a partir del espacio nulo de T (este último es el conjunto de vectores $[v]_B \in K^{n\times 1}$ que satisfacen $T[v]_B = 0$, y que son por tanto ortogonales a todas las filas de T).
Como base de $K^{m\times n}$ pueden elegirse las matrices E^{ij} cuyo único elemento no nulo es el ij, definidas por $E^{ij}_{kl} = 1$ si $k = i$ y $l = j$ y $E^{ij}_{kl} = 0$ en caso contrario. Como base de $Hom(V, V')$ pueden elegirse las correspondientes transformaciones lineales F^{ij} definidas por $F^{ij}(e_l) = 0$ si $l \neq j$ y $F^{ij}(e_l) = e'_i$ si $l = j$, tal que $[F^{ij}]^e_{e'} = E^{ij}$. Aquí e y e' denotan las bases canónicas de K^n y K^m respectivamente.

6.1 Rango, espacio columna y espacio fila de una matriz.
Recordemos que el **espacio columna** (e.c.) de una matriz T de $m \times n$ es el subespacio $S_C \subset K^{m\times 1}$ generado por las n columnas de T, y el **espacio fila** (e.f.) de T el subespacio $S_F \subset K^{1\times n}$ generado por las m filas de T. Estos subespacios son en general diferentes, pero tienen siempre **la misma dimensión** (véase demostración abajo). El **rango** de una matriz T es la dimensión del e.f. o e.c. de la misma.
Recordemos también que el **espacio nulo** de T es el subespacio $S_N \subset K^{n\times 1}$ formado por las soluciones $x \in K^{n\times 1}$ de la ecuación homogénea $Tx = 0$. Su dimensión se denomina nulidad de T.

Consideremos ahora las relaciones entre F y la matriz $T = [F]^B_{B'}$ de $m \times n$ que representa a F en bases $B = (b_1, \ldots, b_n)$, $B' = (b'_1, \ldots, b'_m)$ de V, V' La columna i de T es la matriz columna de componentes $[F(b_i)]_{B'}$, con $[F(v)]_{B'} = T[v]_B$.
a) $\overline{\dim I(F) = \text{rango}(T).}$
En efecto, $I(F) = \overline{\{F(b_1), \ldots, F(b_n)\}}$, por lo que su dimensión es el número de vectores $F(b_i)$ LI. Pero esto coincide con el número de columnas $[F(b_i)]_{B'}$ LI de T (véase Ej. 1), que es la dimensión del e.c. de T, es decir su rango.
b) Como dim $I(F)$ es independiente de las bases B y B' $\Rightarrow$ rango(T)=rango(T') si $T' = S'^{-1}TS$, con S' de $m \times m$ y S de $n \times n$ no singulares, ya que T' corresponde a la representación de F en otro par de bases ($T' = [F]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}'}$, con $S = [I]^{\tilde{B}}_B$, $S' = [I]^{\tilde{B}'}_{B'}$).
c) dim $N(F)$ = nulidad (T). En efecto, $N(F)$ es el subespacio formado por los vectores $v \in V$ que satisfacen $F(v) = 0$, y por lo tanto, $[F(v)]_{B'} = T[v]_B = 0$, de modo que $[v]_B$ pertence al espacio nulo de T. Y si x pertenece al espacio nulo de T ($Tx = 0$) entonces $F(v) = 0$, con $[v]_B = x$. Ambos subespacios son pues isomorfos y tienen la misma dimensión. Esto también implica que nulidad(T) =nulidad(T') si $T' = S'^{-1}TS$ con S' y S no singulares.
La relación dim $N(F)$+ dim $I(F)$ = dim $V = n$ implica entonces nulidad (T)+rango (T) $= n$.

d) La dimensión del e.f. y del e.c. de una matriz arbitraria T de $m \times n$ coinciden.
Dem.: Podemos considerar a T como la representación de una TL $F : V \to V'$ en bases B y B' de V y V', con dim $V = n$, dim $V' = m$, tal que $T = [F]^B_{B'}$. En nuevas bases definidas por $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_k, \tilde{b}_{k+1}, \ldots, \tilde{b}_n)$ tal que $(\tilde{b}_{k+1}, \ldots, \tilde{b}_n)$ sea base de $N(F)$, y $\tilde{B}' = (\tilde{b}'_1, \ldots, \tilde{b}'_k, \tilde{b}'_{k+1}, \ldots, \tilde{b}'_m)$ tal que $\tilde{b}'_i = F(b_i)$ para $i \leq k$ (recordar que estos son LI !) se tendrá $[F(\tilde{b}_i)]_{\tilde{B}'} = 0$ si $i > k$ y $([F(\tilde{b}_i)]_{\tilde{B}'})_j = \delta_{ij}$ si $i \leq k$, por lo que la matriz $T' = [F]^{\tilde{B}}_{\tilde{B}'} = S'^{-1}TS$, con $S = [I]^{\tilde{B}}_B$ y $S' = [I]^{\tilde{B}'}_{B'}$ no singulares, contendrá una submatriz identidad de $k \times k$ en las primeras k filas, siendo las restantes nulas. La dim. del e.c. y del e.f. de esta matriz es por lo tanto k.
Entonces k es la dimensión de la imagen de F, por lo que la dim. del e.c. de $T = S'T'S^{-1}$ será k.
A su vez, el e.f. de T es el e.c. de T^t. Como la dim. del e.c. de T'^t es también k, la dim. del e.c. de $T^t = S^{-1\,t}T'^tS'^t$ es entonces k, por ser S'^t, $S^{-1\,t}$ no singulares. Pero esta es la dim. del e.f. de T.

Una demostración alternativa que permite hallar una base del e.f. y del e.c. de T es la siguiente: Aplicando un número finito de operaciones elementales por fila, se puede llevar T a la forma de escalonada de

Gauss-Jordan,

$$T' = S'^{-1}T = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & x & \ldots & 0 & x & \ldots & 0 & x & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & x & \ldots & 0 & x & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & x & \ldots \\ & & \ldots & & & \ldots & & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ & & \ldots & & & \ldots & & & \ldots \end{array}\right)$$

donde x representa elementos no necesariamente nulos, y S'^{-1} una matriz no singular que es el producto de las operaciones elementales. T' posee k filas no nulas que son LI y por lo tanto la dimensión del e.f. de T' (idéntico al espacio fila de T, por ser las filas de T' combinaciones lineales de las de T) es k. Una base del e.f. de T son pues las k filas no nulas de T'.

k es también el número de columnas LI de T', ya que las columnas con pivotes (primer elemento no nulo de c/fila no nula) son LI y generan el e.c. de T'. Por lo tanto, la dimensión del e.c. de T' es también k. Pero esta es entonces la dimensión del e.c. de T por ser S'^{-1} no singular (véase b)).

Considerando a T como la representación de una TL $F : V \to V'$ en bases B, B' de V y V' tal que $T = [F]^{B}_{B'}$, la matriz $T' = S'^{-1}T = [F]^{B}_{\tilde{B}'}$ corresponde a un cambio de base en V', con $S' = [I]^{\tilde{B}'}_{B'}$. Las columnas con pivotes de T', $[F(b_{i_p})]_{\tilde{B}'}$, forman una base del e.c. de T', por lo que los correspondientes vectores $F(b_{i_p})$ forman una base de $I(F)$. Las correspondientes columnas de T, $[F(b_{i_p})]_{B'}$, forman entonces una base del e.c. de T. Nótese que en general, e.c. $(T) \neq$ e.c. (T'), aunque las dimensiones sean iguales.

Ejemplo 3) Sea $D : P_2 \to P_2$ el operador derivada restringido al subespacio de polinomios de grado ≤ 2. Es obvio que $N(D) = P_0$ (el subespacio de polinomios de grado 0, es decir, constantes) y que $I(D) = P_1$ (el subespacio de polinomios de grado ≤ 1), con dim $N(D)+$ dim $I(D) = 1 + 2 = 3 =$dim P_2.
En forma matricial, en la base "canónica" $e = (1, t, t^2)$, tenemos

$$[D]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es 2, ya que posee dos filas (o columnas) LI, que coincide con dim $I(D)$.
Además, el espacio columna de $[D]_e$ es $\overline{\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}} = \overline{\{[e_1]_e, 2[e_2]_e\}}$, de modo que $I(D)$ será el subespacio generado por $e_1 = 1$ y $e_2 = t$, es decir, P_1.
El espacio nulo de $[D]_e$ es $\overline{\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}} = \overline{\{[e_1]_e\}}$, y $N(D)$ es por lo tanto el subespacio generado por e_1, es decir, P_0.

Ejemplo 4) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2x + y, 3x - y)$. Mostrar que F es no singular y hallar su inversa.
F es un isomorfismo pues $I(F) = \{x(2, 3) + y(1, -1),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$, ya que $(2, 3)$ y $(1, -1)$ son LI y por lo tanto base de $\mathbb{R}^2$. Puede llegarse al mismo resultando notando que $N(F) = \{(0, 0)\}$. Y también, notando que la matriz que representa a F en la base canónica $e = ((1, 0), (0, 1))$ es

$$[F]_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $[F]_e$ es no singular (Det$[[F_e] = -5 \neq 0)$, $[F]_e$ es invertible y por lo tanto F es un isomorfismo. La matriz que representa a su inversa es

$$[F^{-1}]_e = ([F]_e)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

por lo que la función inversa está dada por $F^{-1}(x, y) = (x + y, 3x - 2y)/5$.

Ejemplo 5) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (x + y + z, 2x + z, 3x - y + z)$. Hallar $N(F)$ y $I(F)$. En este caso conviene pasar directamente a la representación matricial. La matriz que representa a F en la base canónica $e = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ es

$$[F]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

F no es un isomorfismo pues $[F]_e$ es una matriz singular ($\mathrm{Det}[[F]_e] = 0$) y por lo tanto no posee inversa. Las columnas b_i de $[F]_{ee}$ están vinculadas por $b_3 = (b_2 + b_1)/2$ (y las filas a_i de $[F]_e$ por $a_3 = 2a_2 - a_1$), siendo b_2 y b_1 L.I.. El rango de $[F]_e$ es por lo tanto 2. Esto implica que $\dim I(F) = 2$ y que $\dim N(F) = 3-2 = 1$. Para hallar $N(F)$ se resuelve el sistema de ecuaciones que resulta de $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$, o sea, $x+y+z = 0$, $2x + z = 0$, $3x - y + z = 0$, que puede reescribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, $[F]_e[v]_e = 0$ (vector columna nulo). Puede verse fácilmente que $[F]_e$ es equivalente por filas a la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La solución al sistema homogéneo está entonces dada por $x = -z/2$, $y = -z/2$, con z arbitrario, por lo que el espacio nulo de la matriz es el conjunto $\overline{\{(-1/2, -1/2, 1)^t\}}$.
El núcleo de F es pues el subespacio generado por el vector $v_0 = (-1/2, -1/2, 1)$
Una base del espacio columna de $[F]_e$ es, por ej., el conj. formado por las dos primeras columnas.
Por lo tanto, $I(F)$ es el espacio generado por $v_1 = (1, 2, 3) = f(e_1)$, $v_2 = (1, 0, -1) = f(e_2)$.
Podemos escribir entonces $V = \overline{\{e_1, e_2\}} \oplus \overline{v_0}$ (la barra sobre vectores indica el espacio generado por dichos vectores), con v_0 base del núcleo y $(F(e_1), F(e_2))$ base de $I(F)$.

Ejemplo 6) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(1, 1) = (2, 1)$, $F(1, -1) = (-1, 0)$. Hallar $F(x, y)$.
Los datos alcanzan para definir F pues $e'_1 = (1, 1)$, $e'_2 = (1, -1)$ son LI y por lo tanto base de $\mathbb{R}^2$ (y toda transformación lineal queda completamente determinada por los vectores que asigna a los elementos de una base). Tenemos, a partir de los datos,

$$[F]_e^{e'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Además,

$$[I]_e^{e'} = S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [I]_{e'}^{e} = S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$[F]_e = [F]_e^{e'}[I]_{e'}^{e} = [F]_e^{e'}S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}/2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que implica

$$F(x, y) = (x + 3y, x + y)/2$$

Puede llegarse al mismo resultado a partir de la relación $e_1 = (e'_1 + e'_2)/2$, $e_2 = (e'_1 - e'_2)/2$, con $Ff[e_1] = [F(e'_1)+F(e'_2)]/2 = (1, 1)/2$, $F[e_2] = [F(e'_1)-F(e'_2)]/2 = (3, 1)/2$ y por lo tanto $F(x, y) = xF(e_1)+yF(e_2) = (x + 3y, x + y)/2$. El método matricial es, no obstante, más directo y apto para ser aplicado a sistemas de grandes dimensiones.