

# **Apuntes de Matemáticas Especiales II**

**Departamento de Física - Universidad Nacional  
de La Plata**

Carlos María Naón, Raúl Rossignoli, Eve Mariel Santangelo

---

# Índice general

<b>I</b>	<b>Ecuaciones Diferenciales</b>	<b>5</b>
I.1.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .	9
I.1.1.	Generalidades . . . . .	9
I.1.2.	Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Algunos casos de fácil resolución . . . . .	11
I.2.	Problemas de condiciones iniciales . . . . .	21
I.2.1.	Teorema de existencia y unicidad de Picard para problemas de valores iniciales . . . . .	21
I.2.2.	Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden . . . . .	27
I.2.3.	Caso particular: sistemas lineales con coeficientes constantes . . . . .	34
I.2.4.	Evaluación de la solución fundamental en el caso general . . . . .	35
I.2.5.	Ecuación diferencial lineal de orden $n$ . . . . .	43
I.2.6.	Breve introducción a Teoría de Distribuciones. . . . .	52
I.2.7.	Matriz de Green como distribución. . . . .	58
I.2.8.	Función de Green para ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$ . . . . .	59
I.3.	Problemas con condiciones de contorno: el problema de Sturm-Liouville . . . . .	67
I.3.1.	Generalidades . . . . .	67
I.3.2.	Tipos de condiciones de contorno . . . . .	68
I.3.3.	Carácter autoadjunto del operador . . . . .	69
I.3.4.	Función de Green para condiciones de Cauchy. Solución del problema inhomogéneo . . . . .	70
I.3.5.	Resolución de ecuaciones lineales homogéneas por series de potencias . . . . .	76
I.3.6.	Autovalores y Autofunciones de $L$ . . . . .	87
I.4.	Serie de Fourier . . . . .	98
I.4.1.	Coefficientes de Fourier . . . . .	99
I.4.2.	Teoremas de Fourier sobre convergencia . . . . .	99
I.4.3.	Forma compleja del desarrollo . . . . .	104
I.4.4.	Serie de Fourier para otros intervalos . . . . .	104
I.4.5.	Desarrollos de medio rango. Series de senos y de cosenos . . . . .	105
I.5.	Transformada de Fourier . . . . .	110
I.6.	Funciones especiales . . . . .	110
I.7.	Bibliografía correspondiente al Capítulo I . . . . .	110

<b>II</b>	<b>Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales</b>	<b>111</b>
<b>III</b>	<b>Probabilidades y Estadística</b>	<b>113</b>
<b>IV</b>	<b>Apéndice</b>	<b>115</b>
	IV.1. . . . .	117

**Parte I**  
**Ecuaciones Diferenciales**



---

Al estudiar fenómenos físicos, en general, se encuentran leyes que no vinculan entre sí a las magnitudes que caracterizan el fenómeno, sino que involucran relaciones entre esas magnitudes y sus derivadas. Así, se obtienen ecuaciones que contienen a la función incógnita (escalar o vectorial) bajo el signo de derivada. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales, y su estudio será el objetivo de las dos primeras partes de estos apuntes.

Por ejemplo:

Ley de desintegración radiactiva

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t). \quad (1)$$

Segunda ley de Newton para una partícula de masa constante (observar que, debido al carácter vectorial de la incógnita, éste es, en realidad, un sistema de tres ecuaciones acopladas)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}). \quad (2)$$

Ecuación de Laplace para el potencial electrostático en ausencia de cargas

$$\Delta \varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

**Definición I.0.1** Una ecuación en la cual la función incógnita aparece bajo el signo de derivada se llama **ecuación diferencial (e.d.)**.

**Definición I.0.2** Si, en la e.d., la función incógnita es función de una sola variable, la e.d. se llama **ecuación diferencial ordinaria** (como ocurre en (1) y (2)). Si, en cambio, la función incógnita es función de dos o más variables, la e.d. se llama **ecuación diferencial en derivadas parciales** (como ocurre en (3)).

En general, en Física, el estudio de sistemas con número finito de grados de libertad conduce a ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que el estudio de medios continuos conduce a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

---

**Definición I.0.3** Se llama **orden** de una e.d. al orden de la derivada de mayor orden de la función incógnita que figura en la ecuación (por ejemplo, (1) es de orden uno, o de primer orden, mientras que (2) y (3) son de orden dos, o de segundo orden).

La determinación de la función incógnita es el problema fundamental que ataca la teoría de ecuaciones diferenciales.

**Definición I.0.4** Se llama **solución** de una e.d. a una función que, sustituida en la e.d., la satisface.

Por ejemplo,  $N(t) = Ce^{-kt}$ , con  $C$  constante arbitraria, es solución de 1. En efecto,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -Cke^{-kt} = -kN(t)$$

La constante arbitraria  $C$  queda determinada si se conoce  $N$  a un dado tiempo. Por ejemplo, si

$$N(0) = N_0, \tag{4}$$

resulta  $C = N_0$ , y se tiene  $N(t) = N_0e^{-kt}$ .

La ecuación (1) y la condición inicial (4) constituyen un **problema de condiciones iniciales**.

**Definición I.0.5** El proceso de determinación de las soluciones de una e.d. se llama **resolución o integración de la ecuación**.

Tal proceso puede ser simple, como en el caso anterior pero, en general, se hace necesario utilizar métodos aproximados, que suelen conducir a una integración numérica. Otras veces, puede interesarnos conocer sólo ciertas propiedades de las soluciones, como su comportamiento frente a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales (problemas de estabilidad) o adquirir una idea gráfica de su comportamiento, graficando campos de derivadas o curvas equipotenciales (ver ejercicios en la guía de trabajos prácticos).

La resolución de una e.d. de orden  $n$  requiere  $n$  integraciones, con la consiguiente aparición de  $n$  constantes de integración. Surge, entonces, la siguiente definición:

**Definición I.0.6** Una solución en que una o más de esas  $n$  constantes toman un valor particular se llama **solución particular** de la e.d.. La solución con las  $n$  constantes indeterminadas se llama **solución general** de la e.d..



## I.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

### I.1.1. Generalidades

Una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  puede escribirse en la forma general

$$F\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^n u}{dt^n}\right) = 0, \quad (5)$$

donde la incógnita es la función  $u(t)$ .

**Definición I.1.1** La ecuación se llama **homogénea** de grado  $p$  si, al multiplicar  $u(t)$  y todas sus derivadas por un parámetro  $\lambda$ , se tiene:

$$F\left(t, \lambda u, \lambda \frac{du}{dt}, \dots, \lambda \frac{d^n u}{dt^n}\right) = \lambda^p F\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^n u}{dt^n}\right), \quad (6)$$

con  $p$  arbitrario (es decir, si  $F$  es una función homogénea de grado  $p$  en la incógnita y todas sus derivadas).

**Definición I.1.2** Una ecuación diferencial ordinaria es **lineal** si, en la ecuación (5),  $F$  es una función lineal de la función incógnita y sus derivadas (aunque no necesariamente de la variable independiente).

Un ejemplo es la ecuación (1). El sistema de ecuaciones acopladas (2) será lineal sólo cuando  $\vec{F}$  sea una función lineal de  $\vec{r}$  y  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ .

Para  $u$  escalar, la forma más general de la ecuación diferencial ordinaria lineal es

$$a_n(t) \frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) u = f(t), \quad a_n(t) \neq 0. \quad (7)$$

La ec. (7) suele escribirse en la forma

$$L[u] = f(t), \quad L = \sum_{m=0}^n a_m(t) \frac{d^m}{dt^m},$$

donde  $L$  es un operador diferencial *lineal*: si  $c_1$  y  $c_2$  son constantes y  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  funciones  $n$  veces derivables,

$$L[c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] = c_1 L[u_1(t)] + c_2 L[u_2(t)] \quad (8)$$

$\forall c_1, c_2, u_1(t), u_2(t)$ . Esta propiedad *define* la linealidad.

De acuerdo con nuestra definición I.1.1, (7) resultará homogénea si  $f(t) = 0$ . Si lo es, será homogénea de grado uno. Si  $f(t) \neq 0$  la ecuación lineal será inhomogénea.

Para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de cualquier orden vale el importantísimo resultado siguiente, que demostraremos más adelante (cuando estudiemos sistemas de ecuaciones lineales de primer orden)

### Principio de superposición

Si  $u_1$  y  $u_2$  son dos soluciones de la ec. homogénea (es decir,  $L[u_1] = L[u_2] = 0$ )  $\Rightarrow u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$  es también solución de la ec. homogénea  $\forall c_1, c_2$ , debido a (8) y es fácil ver que las soluciones de la homogénea constituyen un espacio vectorial, por ejemplo, sobre el cuerpo de los reales.

Más exactamente, se tiene:

a) Una e.d. ordinaria lineal homogénea de orden  $n$  tiene  $n$  soluciones particulares linealmente independientes.

b) La solución general de la homogénea es combinación lineal de esas  $n$  soluciones particulares.

Resumiendo: las soluciones de una ecuación ordinaria lineal y homogénea de orden  $n$  constituyen un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Para la demostración, ver la sección I.2.2.

Como consecuencia del Principio de superposición, resulta el siguiente corolario:

**Corolario I.1.3** *La solución general de la ecuación lineal inhomogénea (194) está dada por la suma de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea más una solución particular de la inhomogénea.*

*Demostración:*

Sea  $u_p(t)$  solución particular de la inhomogénea. Según el principio de superposición, la solución general de la homogénea es  $u_h(t) = \sum_{i=1}^n c_i u_{ih}(t)$ , donde  $u_{ih}(t)$ , con  $i = 1, \dots, n$  son  $n$  soluciones particulares de la ecuación homogénea.

Consideremos  $u(t) = u_p(t) + u_h(t)$ . Usando la linealidad del operador  $L$  se tiene:

$$\begin{aligned} L[u(t)] &= L[u_p(t) + u_h(t)] = L[u_p(t)] + L[u_h(t)] \\ &= L[u_p(t)] + \sum_{i=1}^n c_i L[u_{ih}(t)] = f(t) + 0 = f(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Por lo tanto,  $u(t)$  es solución de la ecuación inhomogénea. Como tiene  $n$  constantes indeterminadas es, en efecto, la solución general de la ecuación inhomogénea.  $\square$

### I.1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Algunos casos de fácil resolución

Consideremos ahora ecuaciones de la forma

$$\frac{du}{dt} = f(t, u). \quad (10)$$

Una ec. diferencial ordinaria de primer orden puede siempre reducirse a esta forma tras resolver la ecuación original respecto a la derivada. Veremos más adelante un importante teorema, debido a Picard, de *existencia* y *unicidad* de la solución para las ecuaciones del tipo (10). Pero primero repasaremos algunos métodos elementales de resolución para casos particulares, que permitirán apreciar varias propiedades generales.

#### Ecuaciones con variables separadas (o separables)

1) Ecuaciones con *variables separadas*

Si  $f(t, u)$  no depende de  $u$ , (10) se reduce a

$$\frac{du}{dt} = f(t), \quad (11)$$

cuya solución general es (si  $f(t)$  es integrable)

$$u(t) = \int f(t)dt + c. \quad (12)$$

La constante  $c$  se denomina *constante de integración*, y puede determinarse conociendo el valor de  $u$  en un cierto tiempo  $t_0$  (es decir, el valor inicial): Si  $u(t_0) = u_0 \Rightarrow$

$$u(t) = \int_{t_0}^t f(t')dt' + u_0. \quad (13)$$

2) Ecuaciones con *variables separables*

Cuando  $f(t, u) = h(t)g(u)$ , la ec. (10) se convierte en

$$\frac{du}{dt} = h(t)g(u). \quad (14)$$

Esta ec. puede reescribirse, para  $g(u) \neq 0$ , como

$$\frac{du}{g(u)} = h(t)dt, \quad (15)$$

cuya solución general es

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int h(t)dt + c. \quad (16)$$

## 1.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

---

Esta ecuación, del tipo  $\phi(t, u) = c$ , determina *implícitamente* la solución  $u(t)$ . La solución particular para  $u(t_0) = u_0$ , con  $g(u_0) \neq 0$ , está dada por

$$\int_{u_0}^u \frac{du'}{g(u')} = \int_{t_0}^t h(t') dt'. \quad (17)$$

Para  $g(u) = 1$  se obtiene, por supuesto, la ec. (13). Si, además, existen raíces  $u_r$  t.q.  $g(u_r) = 0$ , a la solución (16) se deben agregar también las soluciones constantes

$$u(t) = u_r, \quad \text{con} \quad g(u_r) = 0,$$

que no necesariamente se obtienen de (16) o (17), pero que son obviamente solución de (14).

Ejemplo 1: Ecuación de Clausius-Clapeyron para la presión de vaporización en función de la temperatura

Consideremos la ecuación

$$\frac{dP(T)}{dT} = \frac{lP}{RT^2},$$

para  $P > 0$  y  $T > 0$ , donde  $l$  es el calor latente y  $R$  la constante de Rayleigh. La ecuación puede reescribirse

$$\frac{dP}{P} = \frac{l dT}{RT^2}.$$

Se integra fácilmente, con el resultado

$$\log |P| = \log P = \frac{-l}{RT} + \log C,$$

con  $C > 0$ ; de aquí resulta

$$P(T) = C e^{\frac{-l}{RT}}.$$

Si no determinamos  $C$  tendremos una familia de soluciones.  $C$  queda determinada si se conoce  $P$  a una dada temperatura (por ejemplo, si se conoce la presión de vaporización a temperatura ambiente  $P(T_0) = P_0$ ), resulta  $C = P_0 e^{\frac{l}{RT_0}}$  y, por lo tanto,

$$P(T) = P_0 e^{\frac{-l}{RT}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})}.$$

Observar: el caso en que  $f(t, u)$  no depende de  $t$  corresponde a  $h(t) = 1$  en (14). El segundo miembro de (17) se reduce, entonces, a  $t - t_0$ , y la solución  $u(t)$  dependerá, pues, sólo de la diferencia  $t - t_0$ . Eso refleja la invarianza, en este caso, de la ecuación (14) frente a traslaciones temporales. El que sigue es un ejemplo de este caso.

Ejemplo 2: Consideremos la ec. (1)

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t)$$

En este caso, si  $N(t) \neq 0$

$$\frac{dN}{N} = -kdt,$$

lo que conduce a

$$\int \frac{dN}{N} = \ln |N| = - \int kdt + c = -kt + c$$

o sea,

$$N(t) = c'e^{-kt},$$

donde  $c' = \pm e^c$  se determina de la condición inicial. Si  $N(t_0) = N_0 \Rightarrow c' = N_0 e^{\lambda t_0}$  y

$$N(t) = N_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Obtenemos así la conocida fórmula para el decaimiento radiactivo, si  $k > 0$ , y para el crecimiento exponencial de una población, si  $k < 0$ . Si bien la deducción anterior es válida para  $N(t) \neq 0$  (o sea,  $N_0 \neq 0$ ), para  $N_0 = 0$  se recupera la solución constante de (1),  $N(t) = 0 \forall t$ , que corresponde a  $c' = 0$  ( $c \rightarrow -\infty$ ).

Ejemplo 3:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N^2.$$

Procediendo en la forma anterior obtenemos

$$-\frac{1}{N} = -\lambda t + c, \text{ o sea, para } t \neq t_c = \frac{c}{\lambda}$$

$$N(t) = \frac{1}{\lambda t - c}. \tag{18}$$

Si  $N(t_0) = N_0 \Rightarrow c = \lambda t_0 - N_0^{-1}$  y

$$N(t) = \frac{N_0}{1 + N_0 \lambda t'}, \quad t' = t - t_0. \tag{19}$$

Existe, además, la solución trivial  $N(t) = 0 \forall t$ , la cual no es en principio un caso particular de (18), aunque puede obtenerse de (19) para  $N_0 = 0$  ( $c \rightarrow \pm\infty$ ). Para  $N_0 > 0$  y  $\lambda > 0$ , obtenemos un decrecimiento mucho más lento ( $N(t) = O(\lambda t')^{-1}$  para  $t' \gg (N_0 \lambda)^{-1}$ ) que en el ej. 1 pues, a medida que  $N$  disminuye,  $dN/dt$  disminuye más rápidamente que en el otro caso.

Es muy interesante considerar ahora  $\lambda < 0$ . En lugar de un crecimiento exponencial, obtenemos un crecimiento “explosivo”, que *diverge* para  $t' \rightarrow t_c = (|\lambda|N_0)^{-1}$ , lo que refleja el hecho de que al crecer  $N$ ,  $\frac{dN}{dt}$  aumenta, en este caso, muy rápidamente. Matemáticamente, este ejemplo muestra que aún cuando  $f(t, u)$  sea una función continua y derivable, por ejemplo tan simple como  $u^2$ , no necesariamente existe una solución continua de (10) para todo  $t > t_0$ . Veremos luego esto con mayor detalle. Obsérvese también

que, frente a pequeños cambios en la condición inicial  $N_0$ , la solución  $N(t)$  variará fuertemente para  $t$  próximo a  $t_c$ .

2') Ecuaciones que se reducen a variables separables.

En algunos casos es posible reducir la ecuación diferencial a una ecuación del tipo (14) mediante un cambio de variables sencillo. Por ejemplo, si

$$\frac{du}{dt} = f(au + bt), \quad (20)$$

reemplazando  $z = au + bt$ , obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = a \frac{du}{dt} + b = af(z) + b,$$

que es de la forma (14). Por lo tanto, si  $af(z) + b \neq 0$ ,

$$\int \frac{dz}{af(z) + b} = t + c,$$

que determina  $z(t)$  y  $u(t) = (z(t) - bt)/a$ . Si  $\exists z_0$  t.q.  $af(z_0) + b = 0$ , debemos agregar las soluciones  $z = z_0$ , o sea  $u(t) = (z_0 - bt)/a$ .

Análogamente, si

$$\frac{du}{dt} = f(u/t), \quad (21)$$

reemplazando  $z = u/t$  obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t} \frac{du}{dt} - \frac{u}{t^2} = (f(z) - z) \frac{1}{t},$$

que es nuevamente de la forma (14). Por lo tanto,

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c, \quad (22)$$

que determina  $z(t)$  y  $u(t) = tz(t)$ . Si  $\exists z_0$  t.q.  $f(z_0) = z_0$ , se deben agregar las soluciones  $z = z_0$ , o sea,  $u(t) = z_0 t$ . La ec. (21) se denomina, a veces, ec. diferencial homogénea de primer orden (atención: eso puede conducir a confusiones con la definición general I.1.1), y su solución (22) es de la forma  $F(u/t) = c't$ , con  $F(z) = e^{\int dz/(f(z)-z)}$ . Si  $u(t)$  es solución,  $w(t) = u(\lambda t)/\lambda$  es también solución si  $\lambda \neq 0$ .

**Ecuaciones que son o pueden transformarse en diferenciales totales. Factor integrante**

3) *Diferenciales totales*

Dada

$$\frac{du}{dt} = -\frac{f(t, u)}{g(t, u)}, \quad (23)$$

con  $g(t, u) \neq 0$ , podemos reescribir esta ecuación como

$$g(t, u)du + f(t, u)dt = 0. \quad (24)$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial g(t, u)}{\partial t} = \frac{\partial f(t, u)}{\partial u}, \quad (25)$$

$\Rightarrow \exists \phi(t, u)$  t.q.

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = g(t, u), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t, u) \quad (26)$$

y podemos reescribir (24) como la diferencial total

$$d\phi = g(t, u)du + f(t, u)dt = 0.$$

Las soluciones  $u(t)$  de (23) quedan entonces determinadas implícitamente por la ecuación

$$\phi(t, u) = c, \quad (27)$$

con  $c$  constante. Si  $u(t_0) = u_0 \Rightarrow c = \phi(t_0, u_0)$  y la solución particular queda determinada por

$$\phi(t, u) = \phi(t_0, u_0). \quad (28)$$

La condición (25) es necesaria y suficiente para que el primer miembro de (24) sea la diferencial total de una función  $\phi$ . Esta puede obtenerse como la integral de línea

$$\phi(t, u) = \int_{(t_0, u_0)}^{(t, u)} [g(t', u')du' + f(t', u')dt'] + \phi_0 \quad (29)$$

a lo largo de cualquier curva que vaya desde  $(t_0, u_0)$  a  $(t, u)$  (dentro de una región simplemente conexa donde  $f$  y  $g$  estén definidas), con  $\phi_0 = \phi(t_0, u_0)$  una constante arbitraria. Por ejemplo, eligiendo dos segmentos paralelos a los ejes coordenados,

$$\phi(t, u) = \int_{u_0}^u g(t_0, u')du' + \int_{t_0}^t f(t', u)dt' + \phi_0. \quad (30)$$

Equivalentemente, puede integrarse  $\frac{\partial \phi}{\partial u} = g(t, u) =$  para obtener

$$\phi(t, u) = \int g(t, u) du + c(t)$$

y determinar  $c'(t)$  a partir de  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int g(t, u) du + c'(t) = f(t)$ .

Una vez determinada  $c'(t)$  puede obtenerse  $c(t)$  por integración, a menos de una constante, que quedará determinada por la condición inicial.

Notemos que la solución (16) para variables separables corresponde a  $\phi(t, u) = \int \frac{du}{g(u)} - \int f(t) dt$ .

Ejemplo:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2t + u}{2u + t} \quad (31)$$

En este caso  $g(t, u) = 2u + t$ ,  $f(t, u) = 2t + u$ , con  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial t} = 1$ . Podemos, entonces, escribir (31) como

$$d\phi = (2u + t)du + (2t + u)dt = 0,$$

con

$$\begin{aligned} \phi(t, u) &= \int_{u_0}^u (2u' + t_0) du' + \int_{t_0}^t (2t' + u) dt' + \phi_0 \\ &= u^2 + ut + t^2 - (u_0^2 + u_0 t_0 + t_0^2) + \phi_0. \end{aligned}$$

Las solución  $u(t)$  queda entonces determinada por

$$u^2 + ut + t^2 = c, \quad (32)$$

o sea,  $u(t) = -\frac{1}{2}(t \pm \sqrt{4c - 3t^2})$ , con  $c = u_0^2 + u_0 t_0 + t_0^2$  y el signo determinado por  $u(t_0) = u_0$ . La solución sólo está definida para  $t \in [-t_c, t_c]$ , con  $t_c = 2\sqrt{c/3}$ , anulándose el denominador de (31) para  $t = \pm t_c$  ( $u(\pm t_c) = \mp t_c/2$ ). La gráfica de  $u(t)$  es la parte superior o inferior de una elipse con centro en el origen, rotada  $45^\circ$ .

Notemos que la ec. (31) es de la forma (21), con  $f(z) = -(2 + z)/(2z + 1)$ . Puede comprobar el lector que (22) conduce a la solución (32).

3') *Factor integrante.*

Si la ecuación (25) no se verifica, es aún posible convertir la ecuación (24) en una diferencial exacta multiplicando a la misma por una función  $\mu(t, u)$ , llamada factor integrante:

$$d\phi = \mu(t, u)g(t, u)du + \mu(t, u)f(t, u)dt = 0, \quad (33)$$



con

$$\frac{\partial(\mu g)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu f)}{\partial u}. \quad (34)$$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial u} &= \mu^{-1} \left[ f \frac{\partial \mu}{\partial u} - g \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] \\ &= f \frac{\partial \ln |\mu|}{\partial u} - g \frac{\partial \ln |\mu|}{\partial t}, \end{aligned} \quad (35)$$

la cual es una ec. en derivadas parciales para  $\mu(t, u)$ , que puede ser tan difícil de resolver como la ecuación original ( puede demostrarse que si las derivadas de  $f$  y  $g$  son continuas y, por lo menos,  $f$  (ó  $g$ ) es no nula, la ecuación anterior posee siempre una solución no nula). Sin embargo, en algunos casos, su resolución es sencilla. Por ejemplo, si  $\mu(t, u)$  es función de  $t$  solamente, obtenemos

$$\frac{\partial \ln |\mu|}{\partial t} = \left[ \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t} \right] / g,$$

lo cual es factible sólo si el segundo miembro es función de  $t$  únicamente. En tal caso,

$$\mu(t) = c \exp \left[ \int \frac{\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t}}{g} dt \right]. \quad (36)$$

Podemos fijar  $c = 1$ , ya que la constante que multiplica a  $\mu$  es irrelevante. En forma similar pueden considerarse factores integrantes que sean funciones de  $u$ , o en general, de alguna función de  $u$  y  $t$ . Una vez obtenido  $\mu$  se procede como en el ítem anterior para hallar  $\phi(t, u)$ .

Ejemplo:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{u^2 + u(t+1) + t(t+2)}{2u+t}.$$

En este caso,  $\frac{\partial f}{\partial u} = 2u + t + 1 \neq \frac{\partial g}{\partial t} = 1$ . No obstante,  $[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t}] / g = 1$  y, por lo tanto,

$$\mu(t) = e^{\int dt} = e^t,$$

verificándose  $\frac{\partial(e^t f)}{\partial u} = \frac{\partial(e^t g)}{\partial t} = e^t(2u + t + 1)$ . Obtenemos, para este caso,

$$d\phi = e^t [(2u + t)du + (u^2 + u(t+1) + t(t+2))dt] = 0,$$

con  $\phi(t, u) = e^t(u^2 + ut + t^2)$ . La solución está, entonces, determinada por

$$(u^2 + ut + t^2)e^t = c,$$

o sea,  $u = -\frac{1}{2}(t \pm \sqrt{4ce^{-t} - 3t^2})$ , con  $c = \phi(u_0, t_0) > 0$ . La ec.  $\phi(t, u) = c$  origina una curva abierta si  $c > c_c \approx 0,41$  y una curva cerrada más una abierta si  $c < c_c$ , estando las abscisas extremas de las mismas determinadas por la condición  $3t^2 \leq 4ce^{-t}$ .

**Ecuaciones que son o pueden reducirse a ecuaciones lineales**

4) Ecuación general lineal de primer orden. Método de variación de la constante

Corresponde al caso en que  $f(t, u)$  en (10) es una función lineal de  $u$ :

$$\frac{du}{dt} = a(t) + b(t)u. \quad (37)$$

Podemos escribir (37) en la forma

$$L[u] = a(t), \quad L = \frac{d}{dt} - b(t), \quad (38)$$

donde  $L$  es un operador *lineal*.

Consideremos primero  $a(t) = 0$ . En tal caso, la ec. (37) es *homogénea* y de variables separables:

$$\frac{du}{u} = b(t)dt',$$

de donde  $\ln |u(t)| = \int b(t)dt + c'$ , y

$$u(t) = ce^{\int b(t)dt}. \quad (39)$$

Si  $u(t_0) = u_0 \Rightarrow$

$$u(t) = u_0 e^{\int_{t_0}^t b(t')dt'} \quad (40)$$

Si  $a(t) \neq 0$ , podemos intentar una solución del tipo (39), pero con  $c$  una función de  $t$  a determinar:

$$u = u_h(t)c(t), \quad u_h(t) = e^{\int b(t)dt}. \quad (41)$$

Este procedimiento se denomina *variación de parámetros, o de constantes*. Se obtiene, notando que  $L[u_h(t)] = 0$ ,

$$L[u] = L[u_h(t)]c(t) + u_h(t) \frac{dc}{dt} = u_h(t) \frac{dc}{dt} = a(t).$$

Por lo tanto,

$$c(t) = \int \frac{a(t)}{u_h(t)} dt + c'$$

y, reemplazando en (41),

$$\begin{aligned} u(t) &= u_h(t) \left[ c' + \int \frac{a(t)}{u_h(t)} dt \right] \\ &= e^{\int b(t)dt} \left[ c' + \int e^{-\int b(t)dt} a(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

La solución general es, pues, una solución de la ecuación homogénea ( $u_h(t)c'$ ), más una solución particular de la inhomogénea. La solución particular para  $u(t_0) = u_0$  es

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int_{t_0}^t b(t')dt'} \left[ u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{t'} b(t'')dt''} a(t')dt' \right] \\ &= K(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t K(t, t')a(t')dt', \end{aligned} \quad (43)$$

donde  $K(t_2, t_1) = e^{\int_{t_1}^{t_2} b(t)dt} = u_h(t_2)/u_h(t_1)$ . Obsérvese, en este punto, que  $K(t, t) = 1$ .

La ec. (42) puede también obtenerse por el método del factor integrante. En este caso  $f = -[a(t) + b(t)u]$ ,  $g = 1$  y  $(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t})/g = -b(t)$  es función de  $t$ , por lo que  $\mu$  puede obtenerse de (36):  $\mu(t) = ce^{-\int b(t)dt}$ . Finalmente,

$$\phi(t, u) = \mu(t)u - \int \mu(t)a(t)dt.$$

La ec.  $\phi(t, u) = c$  conduce a (42).

**Ejemplo:** La velocidad de una partícula de masa  $m$  en un medio viscoso, sometida a una fuerza  $F(t)$ , satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v + f(t),$$

con  $\lambda = c/m > 0$ ,  $f(t) = F(t)/m$ . La solución general es

$$v(t) = e^{-\lambda t} \left[ c' + \int e^{\lambda t} f(t)dt \right]$$

y la solución para  $v(t_0) = v_0$  puede escribirse como

$$v(t) = v_0 e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-t')} f(t')dt',$$

que corresponde a  $K(t_2, t_1) = e^{-\lambda(t_2-t_1)}$ . Si

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ o } t > t_c \\ f_0 & 0 \leq t \leq t_c \end{cases}$$

se obtiene, para  $t_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t}) & 0 \leq t \leq t_c \\ (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t_c})e^{-\lambda(t-t_c)} & t > t_c \end{cases}.$$

La solución para  $t > t_c$  es equivalente a la solución de la ec. homogénea para  $t_0 = t_c$  y  $v(t_c) = (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t_c})$ . Si  $f_0 \rightarrow \infty$  y  $t_c \rightarrow 0$ , con  $f_0 t_c \rightarrow A$  (finito)  $\Rightarrow v(t_c) \rightarrow A$ .

Notemos también que si  $f(t) = f_0 \forall t > 0$  ( $t_c \rightarrow \infty$ ),  $v(t) = (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t}) \forall t > 0$ , con  $v(t) \rightarrow f_0/\lambda$  (velocidad límite) para  $t \rightarrow \infty$ .

La corriente  $I$  de un circuito eléctrico con autoinducción  $L$ , resistencia  $R$  y tensión  $V(t)$  está descrita por una ec. similar:

$$L \frac{dI}{dt} + IR = V(t).$$

La solución para  $I(0) = I_0$  y  $L, R$  constantes, es

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L} + \int_0^t e^{-R(t-t')/L} V(t') dt'.$$

4') Ecuaciones reducibles a lineales.

Algunas ecuaciones pueden ser reducidas a ecuaciones lineales mediante un sencillo cambio de variables. Un conocido ejemplo es la ecuación de Bernoulli,

$$\frac{du}{dt} = a(t)u^n + b(t)u, \quad n \neq 1.$$

Sustituyendo  $z = u^{1-n}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} n \frac{dz}{dt} &= (1-n)u^{-n} \frac{du}{dt} = (1-n)u^{-n} [a(t)u^n + b(t)u] \\ &= (1-n)[a(t) + b(t)z], \end{aligned}$$

que es una ec. lineal en  $z$ .

En general, si  $u = g(z)$ , con  $g$  invertible, y  $z$  satisface la ecuación lineal  $dz/dt = a(t) + b(t)z$ , obtenemos para  $u$  la ecuación no lineal

$$\frac{du}{dt} = g'(z) \frac{dz}{dt} = g'(g^{-1}(u)) [a(t) + b(t)g^{-1}(u)],$$

que posee la solución  $u(t) = g(z(t))$ , con  $z(t)$  la solución de la ecuación lineal. Por ej., si  $u = z^{1/(1-n)}$ ,  $\frac{du}{dt} = \frac{1}{1-n} [a(t)u^n + b(t)u]$ , que es la ecuación de Bernoulli. Análogamente, si  $u = e^z$ ,

$$\frac{du}{dt} = a(t)u + b(t)u \ln u,$$

cuya solución es  $e^{z(t)}$  mientras que, si  $u = \ln z$ ,

$$\frac{du}{dt} = a(t)e^{-u} + b(t),$$

cuya solución es  $\ln z(t)$ .

## I.2. Problemas de condiciones iniciales

### I.2.1. Teorema de existencia y unicidad de Picard para problemas de valores iniciales

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de 1<sup>er</sup> orden

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad (44)$$

con la condición inicial  $u(t_0) = u_0$ . Salvo casos especiales, como los vistos en la clase anterior, no es posible en general resolver esta ecuación en forma analítica. Es necesario, entonces, recurrir a métodos *aproximados*, que permiten resolver (44) en forma numérica. Para ello, se necesita primero estar seguro de que efectivamente *existe* una solución de (44) para una determinada  $f$  y condición inicial. El siguiente teorema demuestra que dicha solución *existe* y *es única* para una clase muy amplia de funciones. A la vez, el teorema proporciona un *método de resolución aproximado* de (44) (método de Picard), que resulta útil tanto formal como numéricamente.

**Teorema I.2.1** Si  $f(t, u)$  es continua en un rectángulo  $R$  dado por  $|t - t_0| \leq a$ ,  $|u - u_0| \leq b$ , y satisface en  $R$  la condición de Lipschitz

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq N|u_2 - u_1| \quad (45)$$

con  $N$  constante, entonces en el intervalo

$$|t - t_0| \leq r, \quad r = \text{Min}[a, b/M] \quad (46)$$

con  $M$  el valor máximo de  $|f|$  en  $R$ , existe una única solución  $u(t)$  de (44) que satisface  $u(t_0) = u_0$ .

La condición  $|t - t_0| \leq r$  asegura que la solución no se salga de  $R$ . En efecto (ver figura 2), dado que  $|f| \leq M$  en  $R$ , si  $|t - t_0| \leq r$ , integrando (44) y tomando valor absoluto, se obtiene

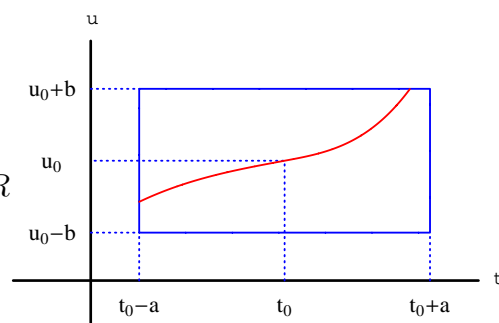
$$|u(t) - u_0| = \left| \int_{t_0}^t f(t', u(t')) dt' \right| \leq \int_{t_0}^t |f(t', u(t'))| dt' \leq M|t - t_0| \leq Mr = b$$

Observar que, para que se cumpla la condición de Lipschitz (45), es suficiente que  $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$  exista y esté acotada en  $R$  dado que, por el teorema del valor medio, si  $|f_u| \leq N$  en  $R$ ,

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| = |f_u(t, \xi)(u_2 - u_1)| \leq N|u_2 - u_1|$$

con  $\xi \in [u_1, u_2]$ .

Figura 1: El rectángulo  $R$



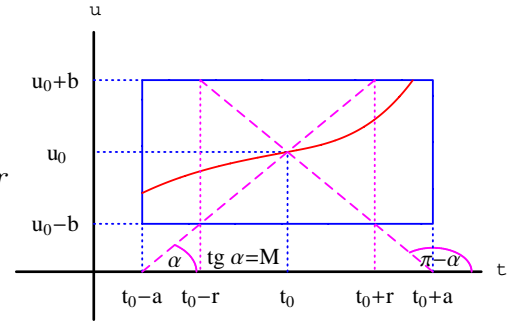


Figura 2: Definición de  $r$

**Demostración:**

Mostraremos primero la **existencia** de la solución. La ec. (44) es equivalente a la ec. integral

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(t', u(t')) dt' \quad (47)$$

Podemos plantear ahora una secuencia de aproximaciones sucesivas  $u_0, u_1(t), \dots, u_n(t)$  definidas por

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(t', u_{n-1}(t')) dt', \quad n \geq 1 \quad (48)$$

con  $u_0(t) = u_0$  (método de Picard). La restricción (46) asegura que  $u_n(t)$  no sale de  $R$  para ningún  $n$  (o sea,  $|u_n(t) - u_0| \leq b$  si  $|t - t_0| \leq r$ ). En efecto, para  $n = 0$  esto se cumple trivialmente. Asumiendo que se cumple para  $u_{n-1}(t)$ , obtenemos, dado que  $|f| \leq M$  en  $R$ ,

$$|u_n(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(t', u_{n-1}(t'))| dt' \leq M|t - t_0| \leq b \quad (49)$$

para  $|t - t_0| \leq r$ .

Probaremos ahora que la sucesión (48) converge. Si  $n \geq 1$  y  $|t - t_0| \leq r$ ,

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(t', u_n(t')) - f(t', u_{n-1}(t'))] dt' \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(t', u_n(t')) - f(t', u_{n-1}(t'))| dt' \right| \\ &\leq N \int_{t_0}^t |u_n(t') - u_{n-1}(t')| dt' \end{aligned} \quad (50)$$

Para  $n = 1$ , (126) implica que

$$|u_1(t) - u_0| \leq M|t - t_0|$$

Por lo tanto, (50) conduce a

$$|u_2(t) - u_1(t)| \leq NM \int_{t_0}^t |t' - t_0| dt = MN \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

y para  $n$  general, a

$$|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq \frac{MN^{n-1}|t - t_0|^n}{n!} \quad (51)$$

(asumiendo (51) como válido,  $|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq MN^n \int_{t_0}^t \frac{|t' - t_0|^n}{n!} dt' = MN^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ ).

Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| = 0$ . Además, como

$$u_n(t) = u_0 + (u_1(t) - u_0) + \dots + (u_n(t) - u_{n-1}(t))$$

el límite

$$u(t) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(t) - u_{n-1}(t)) \quad (52)$$

existe, pues la serie de diferencias es una serie absolutamente convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^{n-1}|t - t_0|^n}{n!} = M \frac{e^{N|t - t_0|} - 1}{N}$$

La convergencia es también uniforme por el criterio de Weierstrass (si  $|f_n(t)| \leq M_n$   $\forall t \in I = [t_1, t_2]$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$  converge uniformemente sobre  $I$  a una función  $f(t)$ ; recordemos que la convergencia es uniforme si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0$  t.q. si  $n > n_0$ ,  $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon \forall t \in I$ ).

Por lo tanto, el límite de la integral en (48) es la integral del límite, de modo que  $u(t)$  es solución de (44). Notemos que  $u(t)$  es un punto fijo del operador  $A[u(t)] = u_0 + \int_{t_0}^t f(t', u(t')) dt'$ , (es decir  $u(t) = A[u(t)]$ ), el cual transforma funciones  $u(t)$  contenidas en  $R$  en funciones  $A[u(t)]$  también contenidas en  $R$  si  $|t - t_0| \leq r$ .

Demostremos ahora la **unicidad**. Si  $v(t)$  es otra solución de (44) que satisface  $v(t_0) = u_0$ , entonces, para  $|t - t_0| \leq r$ ,

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(t', u(t')) - f(t', v(t'))| dt' \\ &\leq N \int_{t_0}^t |u(t') - v(t')| dt' \leq KN|t - t_0| \end{aligned}$$

donde  $K$  es el máximo de  $|u(t) - v(t)|$  para  $|t - t_0| \leq r$ . Esto implica  $|u(t) - v(t)| = 0$  para  $|t - t_0| \leq r$ . En efecto, aplicando la cota anterior para  $|u(t') - v(t')|$ , obtenemos

$$|u(t) - v(t)| \leq KN^2 \int_{t_0}^t |t' - t_0| dt' = KN^2 \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

y repitiendo el procedimiento anterior  $n$  veces,

$$|u(t) - v(t)| \leq K \frac{(N|t - t_0|)^n}{n!} \quad (53)$$

que tiende a 0 para  $n \rightarrow \infty$ .

□

**Ejemplo 1:** Consideremos nuevamente la ecuación lineal

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u$$

Aplicando el método de Picard para  $t_0 = 0$ , con  $u(t_0) = u_0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - \lambda \int_0^t u_0 dt' = u_0[1 - \lambda t] \\ u_2 &= u_0 - \lambda \int_0^t u_1(t') dt' = u_0[1 - \lambda t + \lambda^2 t^2 / 2] \end{aligned}$$

y en general,  $u_n = u_0 \sum_{m=0}^n \frac{(-\lambda t)^m}{m!}$ , de modo que

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^n}{n!} = u_0 e^{-\lambda t}$$

La serie anterior converge  $\forall t$ , pero la condición (46) proporciona una estimación muy conservadora del intervalo de convergencia: Para  $u_0 > 0$ ,  $M = |\lambda|(b + u_0)$  y

$$r = \text{Min}\left[a, \frac{b}{|\lambda|(u_0 + b)}\right] \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

si  $a > |\lambda|^{-1}$ , ya que  $b/(u_0 + b) < 1 \forall b > 0$ . En general, el intervalo (46) es demasiado restrictivo y el desarrollo de Picard converge en un intervalo mayor.

**Ejemplo 2:** Consideremos ahora

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u^2$$

con  $t_0 = 0$ . Obtenemos

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - \lambda \int_0^t u_0^2 dt' = u_0(1 - \lambda u_0 t) \\ u_2 &= u_0 - \lambda \int_0^t u_1^2(t') dt' = u_0 \left[ 1 - \lambda u_0 t + (\lambda u_0 t)^2 - \frac{(\lambda u_0 t)^3}{3} \right] \\ u_3 &= u_0 \left[ \sum_{n=0}^3 (-\lambda u_0 t)^n + R_4(\lambda u_0 t) \right] \end{aligned}$$



donde  $R_4(x) = \frac{1}{3}x^4(2 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{63}x^3)$ . En general,

$$u_n(t) = u_0 \left[ \sum_{m=0}^n (-\lambda u_0 t)^m + R_{n+1}(\lambda u_0 t) \right]$$

con  $R_{n+1}(x) = O(x^{n+1})$ . Para  $n \rightarrow \infty$ , la solución converge, para  $|\lambda u_0 t| < 1$ , a

$$u(t) = \frac{u_0}{1 + \lambda u_0 t} \tag{54}$$

que coincide con la solución (19). Si  $\lambda > 0$  (con  $u_0 > 0$ ) la solución final (54) es válida  $\forall t > 0$ , aunque el desarrollo de Picard converge sólo para  $|t| < |\lambda u_0|^{-1}$ . En cambio, si  $\lambda < 0$  la solución existe sólo para  $t < |\lambda u_0|^{-1}$ , que coincide con el radio de convergencia del desarrollo. Notemos que la condición (46) da en este caso

$$r = \text{Min} \left[ a, \frac{b}{|\lambda|(u_0 + b)^2} \right] \leq \frac{1}{4|\lambda|u_0}$$

dado que  $b/(u_0 + b)^2 < \frac{1}{4u_0}$ , que es nuevamente menor que el radio de convergencia de la serie.

### *Otras propiedades*

Resulta obvio a partir de (44) que si  $f(t, u)$  posee derivadas parciales continuas hasta orden  $k$  en un entorno de  $(t_0, u_0)$ , la solución  $u(t)$  posee derivadas continuas hasta orden  $k + 1$  en un entorno de  $t_0$ .

Puede probarse también que si  $f$  depende en forma continua de un parámetro  $\lambda$  (o sea,  $\frac{du}{dt} = f(t, u, \lambda)$ ) y satisface las condiciones del teorema de unicidad, con  $N$  en (45) independiente de  $\lambda \Rightarrow$  la solución  $u(t, \lambda)$  depende en forma *continua* de  $\lambda$  para  $|t - t_0| \leq r$  (lo mismo rige para un conjunto de parámetros). En particular, esto implica que  $u(t)$  dependerá en forma *continua* de la condición inicial  $u(t_0) = u_0$ . En efecto, escribiendo  $v = u - u_0$ ,  $s = t - t_0$ , tenemos  $\frac{dv}{ds} = f(s + t_0, v + u_0) = g(s, v)$ , con  $v(0) = 0$ , donde los valores iniciales quedan representados por parámetros de la función  $g$ . De todos modos, esto no impide que dos soluciones con condiciones iniciales cercanas se alejen mucho para valores grandes de  $|t - t_0|$ . Por ejemplo, los sistemas caóticos son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. En los mismos, si dos soluciones  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  difieren inicialmente en una pequeña cantidad  $\delta u_0$ , para tiempos grandes  $|u_1(t) - u_2(t)| \approx |\delta u_0| e^{\Lambda t}$ , donde  $\Lambda > 0$  es el llamado *exponente de Lyapunov*.

*Extensión de la solución:* Si bien el teorema demuestra la existencia de solución para  $|t - t_0| \leq r$ , la misma puede en principio extenderse fuera de este intervalo tomando como nuevos puntos iniciales a  $t_0 \pm r$ . No obstante, como hemos visto no siempre es posible continuar la solución indefinidamente. Esto puede deberse a que la solución se acerca a un punto donde las condiciones del teorema no se cumplen, o también porque la solución se aproxima una asíntota vertical ( $\lim_{t \rightarrow t_c} u(t) = \pm\infty$ ), como ocurre en (54) para  $\lambda u_0 < 0$  ( $t_c = |\lambda u_0|^{-1}$ ). Un ejemplo del primer caso es la solución (108) de la ec. (31), limitada al intervalo  $|t| < t_c = \sqrt{4c/3}$ . Si  $t = t_c$ ,  $u(t) = -\frac{1}{2}t$ , anulándose el denominador de (31).

*Puntos singulares.* Los puntos  $(t_0, u_0)$  en los que o bien no existe solución de (44) o la solución no es única, se denominan *puntos singulares*. Obviamente, en estos puntos no se satisfacen las condiciones del teorema de unicidad, aunque no todo punto en el que las mismas no se cumplan es singular. Las condiciones del teorema son suficientes pero no necesarias. Por ejemplo, puede demostrarse que si  $f$  es continua en un entorno de  $(t_0, u_0)$ , existe siempre una solución de (44), pero esta puede no ser única si no se cumple la condición de Lipschitz. La curva formada por los puntos singulares se denomina *curva singular*. Una solución formada enteramente por puntos singulares se denomina *solución singular*.

Ejemplo 1:

$$\frac{du}{dt} = q \frac{u}{t}, \quad q > 0 \quad (55)$$

En este caso  $f(t, u)$  no es continua en  $t = 0$ . Una solución es  $u(t) \equiv 0$ . Si  $u(t) \neq 0$ , integrando por separación de variables obtenemos

$$\ln |u| = q \ln |t| + c'$$

o sea, si  $t > 0$ ,

$$u(t) = ct^q \quad (56)$$

Considerando  $t_0 = 0$ , vemos que si la condición inicial es  $u_0 = 0$ , (56) es solución de (55) para *cualquier valor de  $c$*  (incluyendo  $c = 0$ ). No existe pues solución única, obteniéndose una familia de soluciones. Por el contrario, si  $t_0 = 0$  y  $u_0 \neq 0$ , no existe ninguna solución. Este tipo de punto singular se denomina nudo.

Si consideramos ahora  $q < 0$  en (55),  $u(t)$  no permanece finito para  $t \rightarrow 0$ , excepto para  $c = 0$ . Si  $t_0 = 0$ , para  $u_0 = 0$  obtenemos en este caso una única solución  $u(t) = 0$ , mientras que si  $u_0 \neq 0$  no existe solución.

Ejemplo 2:

$$\frac{du}{dt} = \lambda \sqrt{u}, \quad \lambda \neq 0 \quad (57)$$

Para  $u \rightarrow 0^+$ , si bien  $\sqrt{u}$  es continua, no se cumple la condición de Lipschitz pues  $f_u = \frac{\lambda}{2\sqrt{u}} \rightarrow \infty$ . Los puntos  $(t, u) = (t, 0)$  pueden ser pues puntos singulares. Por separación de variables, para  $u > 0$  obtenemos la solución

$$u(t) = \frac{1}{4}(\lambda t + c)^2, \quad \lambda t + c > 0 \quad (58)$$

No obstante, tenemos también la solución trivial

$$u(t) = 0 \quad (59)$$

que no se obtiene de (58).

Si  $t_0 = 0$  y  $u_0 > 0$ , obtenemos como única solución

$$u(t) = \frac{1}{4}(2\sqrt{u_0} + \lambda t)^2, \quad (60)$$

donde el paréntesis debe ser positivo. La solución (60) está definida  $\forall t > 0$  si  $\lambda > 0$ , pero sólo para  $t \leq t_c = 2\sqrt{u_0}/|\lambda|$  si  $\lambda < 0$ . En este caso,  $u(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow t_c$ , y no puede extenderse para  $t > t_c$ . Si  $\lambda < 0$ , la solución disminuye pues más rápidamente que en el caso lineal ( $\frac{du}{dt} = \lambda u$ , con  $u(t) = u_0 e^{-\lambda t}$  si  $\lambda < 0$ ) “apagándose” en un tiempo *finito*.

Consideremos ahora  $u_0 = 0$ . La ec. (60) se reduce a

$$u(t) = \frac{1}{4}\lambda^2 t^2 \quad (61)$$

Si  $\lambda > 0$ , (61) es solución de (57) y satisface  $u(0) = 0$ , al igual que (59). Por lo tanto, la solución *no es única*. Lo mismo ocurre obviamente para cualquier valor de  $t_0$ . Los puntos  $(0, t)$  son pues singulares y la solución trivial (59) es una solución *singular*. Por el contrario, si  $\lambda < 0$  (61) no es solución de (57), obteniéndose como única solución, para  $u_0 = 0$  y  $t > 0$ , la solución trivial (59).

*Soluciones aproximadas.* Si bien no vamos a tratar el tema de aproximaciones numéricas, cabe destacar que existen también otras sucesiones  $u_n(t)$  que convergen uniformemente a la solución  $u(t)$ , y que pueden por tanto utilizarse para aproximar la solución. El más elemental y conocido es el método de la “quebrada de Euler”, que consiste en subdividir el intervalo  $[t_0, t_0 + r]$  en  $n$  subintervalos de longitud  $h = r/n$ , y aproximar la solución  $u(t)$  por segmentos entre los puntos  $(t_0, u_0), (t_1, u_1), \dots, (t_n, u_n)$  definidos por

$$t_i = t_{i-1} + h, \quad u_i = u_{i-1} + hf(t_{i-1}, u_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n$$

que se obtienen de suponer  $f(t, u(t)) = f(t_{i-1}, u_{i-1})$  (constante) en el intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ . Cada segmento es pues tangente a la solución exacta en  $(t_{i-1}, u_{i-1})$ . Tal aproximación puede mostrarse que converge, para  $h \rightarrow 0$  (o sea,  $n \rightarrow \infty$ ) a la solución exacta  $u(t)$  si se cumplen las condiciones del teorema de existencia. Refinamientos del método anterior conducen a aproximar  $u(t)$  por una sucesión de polinomios de grado  $m$  entre puntos  $(t_i, u_i)$ , tales que posean un contacto de orden  $m$  con la solución exacta en dichos puntos (métodos de Störmer, Runge, etc.). Estos métodos están en la actualidad directamente incorporados en diversos programas de cálculo numérico o analítico, siendo muy sencilla y rápida su utilización.

### I.2.2. Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

1) *Generalización del teorema de Picard a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*

Consideremos ahora el sistema de ecuaciones acopladas

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (62)$$

El teorema de existencia y unicidad se generaliza en forma inmediata a este tipo de sistemas. Podemos reescribir (62) en forma concisa como

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}) \quad (63)$$

con

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad \vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \vec{u}) \\ \vdots \\ f_n(t, \vec{u}) \end{pmatrix},$$

y vale el siguiente teorema:

**Teorema I.2.2** *Dado el sistema de ecuaciones lineales de primer orden*

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}) \quad (64)$$

con condición inicial  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$ , si existe una región  $R$  definida por  $|t-t_0| \leq a$ ,  $|\vec{u}-\vec{u}_0| \leq b$ , donde se cumplen las condiciones

a)  $f_i(t, \vec{u})$  continua en  $R$

b)  $|\vec{f}(t, \vec{u}_2) - \vec{f}(t, \vec{u}_1)| \leq N|\vec{u}_2 - \vec{u}_1|$ ,

entonces existe una única solución  $\vec{u}(t)$  de (67) que satisface  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$ , dentro del intervalo

$$|t - t_0| \leq r = \text{Min}[a, b/M]$$

donde  $M$  es el máximo de  $|\vec{f}|$  en  $R$ .

Para que se cumpla la condición de Lipschitz es suficiente que las derivadas parciales  $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$  sean acotadas en  $R$ , pues en tal caso, por el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned} |\vec{f}(t, \vec{u}_2) - \vec{f}(t, \vec{u}_1)|^2 &= \sum_i |f_i(t, \vec{u}_2) - f_i(t, \vec{u}_1)|^2 \\ &= \sum_i \left| \sum_j f_{ij}(t, \vec{\xi}_i)(u_{2j} - u_{1j}) \right|^2 \\ &\leq \sum_i \left( \sum_j N_{ij} |u_{2j} - u_{1j}| \right)^2 \leq N^2 |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|^2 \end{aligned} \quad (65)$$

La demostración del teorema es exactamente igual al caso de una dimensión. Sólo se deben reemplazar  $f$ ,  $u$  y  $v$  en (47)–(53) por  $\vec{f}$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

□

Esta generalización es muy poderosa. Por ejemplo, la ec. diferencial ordinaria de orden  $n$ ,

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right) \quad (66)$$

puede reducirse a un sistema de  $n$  ec. ordinarias de primer orden de la forma (67) definiendo

$$u_1 = u, u_2 = \frac{du}{dt}, \dots, u_n = \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}$$

con

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \frac{du_2}{dt} = u_3, \dots, \frac{du_n}{dt} = f(t, u_1, \dots, u_n)$$

o sea,  $f_1(t, \vec{u}) = u_2, f_2(t, \vec{u}) = u_3, \dots, f_n(t, \vec{u}) = f(t, \vec{u})$ .

Queda pues garantizada *la existencia y unicidad* de la solución de (66) para la condición inicial  $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ , donde  $\vec{u}_0 = (u(0), \frac{du}{dt}|_{t=0}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}|_{t=0})$  es el vector que contiene los valores iniciales de la posición, velocidad, aceleración, etc, si  $f$  satisface las condiciones del teorema. En forma análoga, un sistema de  $m$  ec. diferenciales acopladas de orden  $n$  puede reducirse a un sistema de  $n \times m$  ecuaciones de primer orden.

Un caso particularmente importante de sistema de primer orden es aquél en que  $\vec{f}(t, \vec{u})$  es una función lineal de  $\vec{u}$ :

**Definición I.2.3** *Un sistema de ecuaciones ordinarias de primer orden del tipo (64) se llama lineal, si puede escribirse en la forma*

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A(t)\vec{u} + \vec{f}(t), \tag{67}$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & \dots & A_{1n}(t) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{68}$$

se denomina *matriz del sistema*.

Supondremos, además, condición inicial dada por  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$

Más explícitamente, se tiene

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n A_{ij}(t)u_j(t) + f_i(t) \quad i = 1, \dots, n, \tag{69}$$

con dados valores de  $u_i(t_0)$  para  $i = 1, \dots, n$ .

1) *Resolución del caso homogéneo. Matriz fundamental*

Estudiaremos primero el sistema homogéneo,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A(t)\vec{u} \tag{70}$$

o sea,  $L[\vec{u}] = 0$ . Probaremos un importante teorema:

**Teorema I.2.4** *Las soluciones del sistema lineal homogéneo (70) forman un espacio vectorial de dimensión  $n$  (principio de superposición).*

*Que formen un espacio vectorial (o lineal) significa que, si  $\vec{u}_1(t)$  y  $\vec{u}_2(t)$  son soluciones, la combinación lineal*

$$\vec{u}(t) = c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t) \quad (71)$$

*es también solución  $\forall c_1, c_2$  (constantes). Y que el espacio sea de dimensión  $n$  significa que existen exactamente  $n$  soluciones  $\vec{u}_1(t), \vec{u}_2(t), \dots, \vec{u}_n(t)$  linealmente independientes  $\forall t \in I_0$ , tales que cualquier solución  $\vec{u}(t)$  puede escribirse como combinación lineal de las mismas:*

$$\vec{u}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \vec{u}_j(t) \quad (72)$$

*donde los coeficientes  $c_j$  son constantes.*

*Demostración: Dado que el operador  $L$  en (70) es lineal, la combinación (71) será obviamente solución de (70) si  $\vec{u}_1(t)$  y  $\vec{u}_2(t)$  son soluciones.*

*Mostraremos ahora que existen  $n$  y sólo  $n$  soluciones  $\vec{u}_j(t)$  linealmente independientes. Dado que  $\vec{u}$  posee  $n$  componentes, podemos encontrar  $n$  vectores linealmente independientes  $\vec{u}_j^0$ . Por ejemplo,*

$$\vec{u}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{u}_n^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (73)$$

*Para  $j = 1, \dots, n$ , sea*

$$\vec{u}_j(t) = \begin{pmatrix} u_{1j}(t) \\ u_{2j}(t) \\ \dots \\ u_{nj}(t) \end{pmatrix}$$

*la solución del sistema (70) con la condición inicial  $\vec{u}_j(t_0) = \vec{u}_j^0$ . Por el teorema de existencia, tal solución existe y es única para  $|t - t_0| \leq r$  (o sea,  $t \in I_0$ ).*

*Consideremos ahora una solución arbitraria  $\vec{u}(t)$  con la condición inicial  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$ . Para  $t = t_0$ , como los vectores  $\vec{u}_j(t_0) = \vec{u}_j^0$  forman una base, podemos escribir*

$$\vec{u}(t_0) = \sum_{j=1}^n c_j \vec{u}_j(t_0) \quad (74)$$

*Debido a la linealidad del espacio,  $\sum_{j=1}^n c_j \vec{u}_j(t)$  satisface la ecuación diferencial y la condición inicial. Pero, como la solución para una determinada condición inicial es única, debe cumplirse*

$$\vec{u}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \vec{u}_j(t) \quad (75)$$

## I.2 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES

$\forall t \in I_0$ , ya que el segundo miembro de (75) es también solución de (70) y cumple la condición inicial. Esto muestra que la dimensión del espacio no es mayor que  $n$ .

Falta mostrar que las  $n$  soluciones  $\vec{u}_j(t)$  permanecen linealmente independientes  $\forall t \in I_0$ . Si, por ejemplo, para  $t = t_1 \in I_0$ , las soluciones fuesen linealmente dependientes, entonces existiría una solución del tipo (75), con  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  no todos nulos, que sería nula para  $t = t_1$ :

$$\vec{u}(t_1) = \sum_{j=1}^n c_j \vec{u}_j(t_1) = \vec{0}$$

Pero como también existe la solución trivial  $\vec{u}(t) = \vec{0} \forall t \in I_0$ , por unicidad la solución anterior debe coincidir con la solución trivial  $\forall t \in I_0$  y por lo tanto,  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ , en contradicción con lo supuesto. Las soluciones permanecen, pues, linealmente independientes. □

Podemos formalizar algo más los resultados anteriores. Una matriz de soluciones linealmente independientes

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \dots & u_{1n}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) & \dots & u_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}(t) & u_{n2}(t) & \dots & u_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (76)$$

donde la columna  $j$ -ésima contiene las componentes de la solución  $\vec{u}_j(t)$ , se denomina *matriz fundamental* del sistema. Como  $d\vec{u}_j/dt = A(t)\vec{u}_j(t)$ , con  $\vec{u}_j(0) = \vec{u}_j^0$ , la matriz  $U(t)$  satisface la ec.

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U(t), \quad \text{con } U(t_0) = U_0 \quad (77)$$

donde  $U_0$  es la matriz que contiene las  $n$  condiciones iniciales linealmente independientes  $\vec{u}_j^0$  ( $U_0 = I$  (matriz identidad) en el caso (73)). Recordando que  $n$  vectores son linealmente independientes si y sólo si el determinante de sus componentes es no nulo, tenemos  $\text{Det}[U(t_0)] \neq 0$ , y por el teorema anterior,  $\text{Det}[U(t)] \neq 0 \forall t \in I_0$ .

La solución general de (70) puede expresarse como

$$\vec{u}(t) = U(t)\vec{c} \quad (78)$$

donde  $\vec{c}$  es un vector constante, lo cual es otra forma de escribir (75). La solución particular para la condición inicial  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$  se obtiene para  $\vec{c} = U^{-1}(t_0)\vec{u}_0$ :

$$\vec{u}(t) = U(t)U^{-1}(t_0)\vec{u}_0 \equiv K(t, t_0)\vec{u}_0,$$

ya que satisface  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$ . (Observar que  $K(t, t_0)$  satisface la ecuación homogénea y, para  $t = t_0$ , se reduce a la matriz identidad) Para las condiciones iniciales (73),  $U(t_0) = I$  y  $\vec{u}(t) = U(t)\vec{u}_0$ . (En este caso,  $K(t, t_0) = U(t)$ )

Utilizando el método de Picard, podemos expresar, en general,  $U(t)$  para  $t \in I_0$  como

$$U(t) = [I + \int_{t_0}^t A(t') dt' + \int_{t_0}^t A(t') dt' \int_{t_0}^{t'} A(t'') dt'' + \dots] U_0 \quad (79)$$

*Evolución del determinante.* Podemos calcular explícitamente  $\text{Det}[U(t)]$  y verificar que  $\text{Det}[U(t)] \neq 0$  si  $\text{Det}[U(t_0)] \neq 0$ . Para ello, notemos primero que si  $t$  es un parámetro cualquiera de  $U$ , tenemos

$$\frac{d}{dt} \text{Det}[U] = \sum_{i,j=1}^n \frac{dU_{ij}}{dt} \tilde{U}_{ji} = \text{Tr} \left[ \frac{dU}{dt} \tilde{U} \right] \quad (80)$$

donde  $\tilde{U}_{ji} = (-1)^{i+j} \text{Det}[U^{(i,j)}]$  y  $U^{(i,j)}$  es la matriz con la fila  $i$  y columna  $j$  de  $U$  suprimidas, tal que

$$U \tilde{U} = \text{Det}[U] I$$

y  $\text{Tr}$  es la traza. Por lo tanto, en el caso (70),

$$\frac{d}{dt} \text{Det}[U] = \text{Tr}[A(t)U \tilde{U}] = \text{Det}[U] \text{Tr}[A(t)]$$

lo que constituye una ec. dif. lineal ordinaria para  $\text{Det}[U(t)]$ . Obtenemos entonces

$$\text{Det}[U(t)] = \text{Det}[U(t_0)] e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}[A(t')] dt'}$$

con  $\text{Det}[U(t_0)] = \text{Det}[U_0] \neq 0$ . Por lo tanto  $\text{Det}[U(t)] \neq 0 \forall t \in I_0$ , de modo que las soluciones permanecen *linealmente independientes*, como habíamos demostrado.

## 2) Resolución del caso inhomogéneo. Matriz de Green.

Volvamos ahora al sistema original (67). Si  $U(t)$  es una matriz fundamental del sistema homogéneo (70), podemos plantear una solución particular del tipo

$$\vec{u}(t) = U(t) \vec{c}(t)$$

Tenemos, dado que  $dU/dt = A(t)U$ ,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{dU}{dt} \vec{c} + U \frac{d\vec{c}}{dt} = A(t)U \vec{c} + U \frac{d\vec{c}}{dt} = A(t) \vec{u} + U \frac{d\vec{c}}{dt}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} - A(t) \vec{u} = U(t) \frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{f}(t)$$

de donde  $d\vec{c}/dt = U^{-1}(t) \vec{f}(t)$  y

$$\vec{c}(t) = \vec{c} + \int U^{-1}(t) \vec{f}(t) dt$$



La solución general es, pues, de la forma

$$\vec{u}(t) = U(t)[\vec{c}' + \int U^{-1}(t)\vec{f}(t)dt] \quad (81)$$

y la solución particular para  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$  es

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= U(t)[U^{-1}(t_0)\vec{u}_0 + \int_{t_0}^t U^{-1}(t')\vec{f}(t')dt'] \\ &= K(t, t_0)\vec{u}_0 + \int_{t_0}^t K(t, t')\vec{f}(t')dt' \end{aligned} \quad (82)$$

con

$$K(t, t') = U(t)U^{-1}(t'). \quad (83)$$

Notemos aquí, que  $K(t, t')$  satisface

$$\frac{dK(t, t')}{dt} = A(t)K(t, t'), \quad \text{con } K(t', t') = I. \quad (84)$$

Observar: El primer término de (82) es la solución del sistema homogéneo que satisface la condición inicial. El segundo, que se anula para  $t = t_0$  es una solución particular del sistema inhomogéneo, construida por combinación lineal de  $n$  soluciones particulares del sistema homogéneo (las soluciones fundamentales). La ecuación (82) generaliza y es completamente análoga a la ecuación (43) de I.1.1, válida para el caso de una dimensión, donde  $U(t) = u_h(t)$  es una matriz de  $1 \times 1$  (con  $u_h(t)$  una solución no nula de la ecuación homogénea) y  $K(t, t') = u_h(t)/u_h(t')$ .

Notemos también que, si  $\vec{u}_1(t)$  y  $\vec{u}_2(t)$  son soluciones particulares para  $\vec{f}_1(t)$  y  $\vec{f}_2(t)$ ,  $\vec{u}(t) = c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t)$  es una solución particular para  $\vec{f}(t) = c_1\vec{f}_1(t) + c_2\vec{f}_2(t)$  (extensión del principio de superposición). Esto puede verse de (82) o también, directamente, de (67) por la linealidad de  $L$ . Podemos pues descomponer la fuerza en varios términos o componentes y luego sumar las soluciones para cada una de ellas.

Consideremos, en detalle, la solución para condición inicial nula:

$$\vec{u}(t) = \int_{t_0}^t K(t, t')\vec{f}(t')dt'. \quad (85)$$

Si, además,  $\vec{f}(t) = \vec{0} \forall t < 0$  y el sistema está en equilibrio para  $t < t_0$ , con  $u(t) = 0 \forall t < t_0$ , puede escribirse

$$\vec{u}(t) = \int_{-\infty}^t K(t, t')\vec{f}(t')dt' \quad (86)$$

o, equivalentemente,

$$\vec{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t')\vec{f}(t')dt', \quad (87)$$

donde hemos definido

$$G(t, t') = \begin{cases} 0 & t_0 \leq t < t' \\ K(t, t') & t_0 \leq t' < t \end{cases} \quad (88)$$

La matriz  $G$  se llama matriz de Green del sistema de ecuaciones. Como se ve, permite establecer el efecto, en un dado valor de  $t$ , de una fuente que actúa en cualquier  $t' < t$ . Dado que, para problemas de valores iniciales, la variable  $t$  es, en general, el tiempo, suele llamarse a  $G(t, t')$  así definida la función de Green causal. Nótese que es discontinua en  $t = t'$  ( $\lim_{t \rightarrow t'+} = I$ ;  $\lim_{t \rightarrow t'-} = 0$ ).

Escribiendo explícitamente los elementos de matriz, se tiene

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(t, t') f_j(t') dt', \quad (89)$$

con

$$G_{ij}(t, t') = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t' \\ K_{ij}(t, t') = \sum_{k=1}^n U_{ik}(t) U_{kj}^{-1}(t') & 0 \leq t' < t \end{cases}. \quad (90)$$

### I.2.3. Caso particular: sistemas lineales con coeficientes constantes

Estudiaremos ahora el importante caso en el que la matriz  $A$  en (67) es *independiente* del tiempo, es decir,  $A_{ij}(t) = A_{ij}$ , constante  $\forall i, j$ . El sistema de ecuaciones *homogéneo*,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u} \quad (91)$$

es ahora *invariante* frente a traslaciones temporales. Podemos pues suponer, sin pérdida de generalidad,  $t_0 = 0$ , ya que si  $\vec{u}(t)$  es la solución de (91) para  $\vec{u}(0) = \vec{u}_0 \Rightarrow \vec{u}(t - t_0)$  será la solución de (70) para  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$ . La ec. (79) conduce entonces a

$$\begin{aligned} U(t) &= [I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots] U_0 = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right] U_0 \\ &= \exp[At] U_0 \end{aligned} \quad (92)$$

donde hemos introducido la *exponencial* de una matriz,

$$\exp[A] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \dots \quad (93)$$

Este serie converge  $\forall$  matriz cuadrada  $A$  de dimensión finita  $m$  (si  $|A_{ij}| \leq K \forall i, j \Rightarrow |(A^2)_{ij}| \leq mK^2$  y en general,  $|(A^n)_{ij}| \leq (mK)^n/m$ , por lo que  $|[\exp(A)]_{ij}| \leq e^{mK}/m$ ). Podemos verificar que (92) es la solución de (84)  $\forall t$ :

$$\frac{d}{dt} \exp[At] = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} = A \exp[At]$$

La solución general de la ec. homogénea puede pues escribirse como

$$\vec{u}(t) = \exp[At]\vec{c} \quad (94)$$

y la solución particular para  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$  es

$$\vec{u}(t) = \exp[A(t - t_0)]\vec{u}_0$$

La solución de la ec. inhomogénea para  $\vec{u}(t_0) = \vec{u}_0$  es

$$\vec{u}(t) = \exp[A(t - t_0)]\vec{u}_0 + \int_{t_0}^t \exp[A(t - t')]\vec{f}(t')dt' \quad (95)$$

que corresponde a  $K(t, t') = \exp[A(t - t')]$  en (82).

*Nota:* Para matrices  $A$  y  $B$  generales,

$$\exp[A + B] \neq \exp[A]\exp[B] \neq \exp[B]\exp[A]$$

La igualdad se cumple sólo si  $A$  conmuta con  $B$ , o sea, si  $[A, B] \equiv AB - BA = 0$ . Por ejemplo,

$$\exp[A]\exp[-A] = \exp[A - A] = \exp[0] = I$$

Por lo tanto, la inversa de  $\exp[A]$  es  $\exp[-A]$ . Además,

$$\exp[A(t - t_0)] = \exp[At - At_0] = \exp[At]\exp[-At_0]$$

#### I.2.4. Evaluación de la solución fundamental en el caso general

Veremos, en primer lugar, cómo evaluar  $e^{At}$ . Si  $A$  es *diagonal* ( $A_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ )  $\Rightarrow \exp[At]$  es también *diagonal*, con  $(\exp[At])_{ij} = e^{\lambda_i t} \delta_{ij}$ :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \exp[At] = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Esto es consecuencia inmediata de (93), ya que  $(A^n)_{ij} = \lambda_i^n \delta_{ij}$ . En este caso el sistema (70) es *desacoplado*, y las soluciones son obviamente  $u_i(t) = u_i(0)e^{\lambda_i t}$ , que pueden escribirse como  $\exp[At]\vec{u}(0)$ .

En general, notemos que si

$$A = VA'V^{-1} \quad (96)$$

$\Rightarrow A^2 = (VA'V^{-1})^2 = VA'V^{-1}VA'V^{-1} = VA'^2V^{-1}$ , y en general,  $A^n = (VA'V^{-1})^n = VA'^nV^{-1}$ , por lo que

$$\exp[At] = \exp[V(A't)V^{-1}] = V \exp[A't]V^{-1} \quad (97)$$

La evaluación de  $\exp[At]$  es entonces inmediata si se logra escribir  $A$  en la forma (96) con  $A'$  diagonal. En tal caso la matriz  $A$  es *diagonalizable*, y la descomposición (96) puede lograrse mediante la *diagonalización* de  $A$ .

*Diagonalización de matrices.*

Sea  $A$  de  $n \times n$  y  $\vec{v}$  de  $n \times 1$ . Se dice que  $\vec{v} \neq \vec{0}$  es *autovector* de  $A$  si  $\exists \lambda$  t.q.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0} \quad (98)$$

En tal caso,  $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$  y por lo tanto,

$$\text{Det}[A - \lambda I] = 0 \quad (99)$$

Los valores de  $\lambda$  que satisfacen (183) se denominan *autovalores* de la matriz  $A$ , y la ec. (183) es la *ecuación característica*, que es de grado  $n$  en  $\lambda$ . Posee pues a lo sumo  $n$  raíces distintas  $\lambda_k$ , reales o complejas.

Una vez hallados los autovalores  $\lambda_k$ , es decir, todas las raíces de (183), los autovectores correspondientes  $\vec{v}_k = (v_{1k}, \dots, v_{nk})$  se obtienen resolviendo la ec. (98),

$$A\vec{v}_k = \lambda_k\vec{v}_k \quad (100)$$

o sea,  $\sum_j A_{ij}v_{jk} = \lambda_k v_{ik}$ .

Si  $\vec{v}$  es autovector  $\Rightarrow c\vec{v}$ , con  $c \neq 0$ , es también autovector con el mismo autovalor. Los autovectores quedan pues definidos a menos de una constante. Obviamente, los autovectores correspondientes a dos autovalores distintos son *linealmente independientes* ( $\vec{v}_k \neq c\vec{v}_{k'}$  si  $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$ ). Análogamente,  $n$  autovectores  $\vec{v}_k$  de  $n$  autovalores distintos  $\lambda_k$  son l.i. (por inducción, si suponemos  $\vec{v}_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \vec{v}_k \Rightarrow A\vec{v}_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \lambda_k \vec{v}_k = \lambda_n \sum_{k=1}^{n-1} c_k \vec{v}_k$ , lo que es absurdo si los  $\vec{v}_k$  son l.i. y  $\lambda_n \neq \lambda_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ ).

Si la ec. (183) posee  $n$  autovalores distintos, podemos pues formar una matriz de autovectores  $V$  de elementos  $V_{ik} = v_{ik}$ , t.q. la  $k$ -ésima columna de  $V$  contenga las componentes del autovector  $\vec{v}_k$ .  $V$  satisface la ec.

$$AV = VA', \quad A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, como  $\text{Det}[V] \neq 0$ , podemos escribir

$$A = VA'V^{-1} \quad \text{o} \quad A' = V^{-1}AV$$

con  $A'$  diagonal.

Un caso especial es el de las matrices *hermíticas*, definidas por  $A_{ij} = A_{ji}^* \forall i, j$ , es decir,

$$A^\dagger = A$$

donde  $A^\dagger$  es la matriz adjunta (traspuesta-conjugada). Si  $A$  es real,  $A$  hermítica implica  $A$  simétrica. Estas matrices, que surgen frecuentemente en física, son *siempre diagonalizables*, aún si el número de autovalores distintos es  $< n$ . Más aún, sus autovalores son siempre *reales*, y los autovectores correspondientes a autovalores distintos son *ortogonales* con respecto al producto escalar usual:

$$\vec{v}_k^* \cdot \vec{v}_{k'} = \sum_i v_{ik}^* v_{ik'} = 0 \text{ si } \lambda_k \neq \lambda_{k'}$$

En efecto, si

$$A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k, \quad A\vec{v}_{k'} = \lambda_{k'} \vec{v}_{k'} \quad (101)$$

multiplicando la primera ecuación a izquierda por el vector fila  $\vec{v}_k^\dagger$  obtenemos

$$\vec{v}_k^\dagger A \vec{v}_k = \lambda_k (\vec{v}_k^\dagger \cdot \vec{v}_k)$$

dado que  $\vec{v}_k^\dagger \vec{v}_k = \vec{v}_k^* \cdot \vec{v}_k$ . Si  $A$  es hermítica,  $\vec{v}_k^\dagger A \vec{v}_k = \sum_{i,j} v_{ik}^* A_{ij} v_{jk}$  es *real*, y también es real  $\vec{v}_k^* \cdot \vec{v}_k = \sum_i |v_{ik}^2|$ , por lo que  $\lambda_k$  *debe ser real*. Ahora, tomando el adjunto de la primera ecuación en (101), tenemos

$$\vec{v}_k^\dagger A = \lambda_k \vec{v}_k^\dagger$$

donde hemos tenido en cuenta que  $A^\dagger = A$  y  $\lambda_k^* = \lambda_k$ . Multiplicando la ec. anterior a la derecha por el vector columna  $\vec{v}_{k'}$  y la segunda ec. en (101) a la izquierda por el vector fila  $\vec{v}_k^\dagger$ , y restando, obtenemos

$$0 = (\lambda_k - \lambda_{k'}) (\vec{v}_k^* \cdot \vec{v}_{k'})$$

de donde  $\vec{v}_k^* \cdot \vec{v}_{k'} = 0$  si  $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$ . Los autovectores correspondientes a autovalores iguales pueden también elegirse ortogonales, por lo que en el caso de matrices hermíticas, existe un conjunto *completo* de autovectores normalizados ( $\vec{v}_k^* \cdot \vec{v}_k = 1$ ) tal que

$$\vec{v}_k^* \cdot \vec{v}_{k'} = \delta_{kk'}$$

en cuyo caso la matriz  $V$  resulta *unitaria*:  $V^{-1} = V^\dagger$ .

Las matrices *antihermíticas* ( $A^\dagger = -A$ ) son también siempre diagonalizables y poseen un conjunto completo de autovectores ortogonales, pero sus autovalores son imaginarios ( $\lambda_k = i|\lambda_k|$ ). Esto es inmediato ya que si  $A^\dagger = -A$ , la matriz  $B = iA$  es hermítica ( $B^\dagger = -iA^\dagger = B$ ) y por lo tanto diagonalizable.  $A = -iB$  es entonces diagonalizable, con  $A\vec{v}_k = -i\lambda_k \vec{v}_k$  si  $B\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$ .

*Evaluación de  $\exp[At]$  en el caso diagonalizable.* Si  $A$  es diagonalizable, se obtiene, de (191),

$$\exp[At]_{ij} = \sum_k V_{ik} e^{\lambda_k t} V_{kj}^{-1}$$

y la solución general (94) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= V \exp[A't] \vec{a} \\ &= \sum_k a_k e^{\lambda_k t} \vec{v}_k \end{aligned} \quad (102)$$

## I.2 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES

---

donde  $\vec{a} = V^{-1}\vec{c}$  es un vector de constantes arbitrarias. Como los autovalores  $\lambda_k$  pueden ser reales o complejos, las soluciones serán combinaciones lineales de funciones del tipo  $e^{\lambda_k t} \cos(\lambda_k t + \phi)$ . Si  $\vec{u}(0) = \vec{v}_k \Rightarrow a_j = \delta_{jk}$  y

$$\vec{u}(t) = \vec{v}_k e^{\lambda_k t} \quad (103)$$

La solución  $\vec{u}(t)$  permanece en este caso *proporcional* a  $\vec{u}(0)$  y tiene una evolución de tipo exponencial. En tratamientos más elementales o intuitivos, directamente se plantea una solución del tipo (103), que al ser reemplazada en el sistema original (91), conduce a

$$\lambda_k \vec{v}_k e^{\lambda_k t} = A \vec{v}_k e^{\lambda_k t}$$

es decir,  $A \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$ , que es la ec. de autovalores (100), lo que requiere  $\text{Det}[A - \lambda_k I] = 0$ . La soluc. gral (102) se obtiene luego como combinación lineal de las soluciones particulares (103).

Si interpretamos la matriz  $A$  como la representación de un operador *lineal*  $\hat{A}$  en una determinada base, la transformación (96) (denominada transformación de similitud) corresponde a un *cambio de base*. El vector

$$\tilde{\vec{u}} = V^{-1} \vec{u}$$

de componentes  $\tilde{u}_i = \sum_j V_{ij}^{-1} u_j$ , satisface la ecuación

$$\frac{d\tilde{\vec{u}}}{dt} = A' \tilde{\vec{u}}, \quad A' = V^{-1} A V \quad (104)$$

Si elegimos  $V$  como la matriz de autovectores,  $A'$  es diagonal y el sistema (104) es *desacoplado*:  $d\tilde{u}_k/dt = \lambda_k \tilde{u}_k$ . Podemos pues “desacoplar” el sistema original (70) mediante la transformación lineal (104). Las nuevas variables  $\tilde{u}_k$  pueden interpretarse como las coordenadas de la solución en la base donde  $\hat{A}$  es diagonal, y son las “coordenadas normales” del sistema. La ec.  $\vec{u}(t) = V \tilde{\vec{u}}(t)$  conduce a (102).

**Ejemplo:** Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = ay + bx \quad (105)$$

Podemos escribirlo en la forma

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

La ec. característica es  $\text{Det}[A - \lambda I] = (a - \lambda)^2 - b^2 = 0$ , y sus raíces son

$$\lambda_{\pm} = a \pm b$$

Resolviendo la ec.  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$  obtenemos los autovectores

$$\vec{v}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que son ortogonales,  $\vec{v}_+ \cdot \vec{v}_- = 0$ , y están normalizados:  $\vec{v}_+^* \cdot \vec{v}_+ = \vec{v}_-^* \cdot \vec{v}_- = 1$  (o sea, son ortonormales). La soluc. gral de (105) es pues, según (102),

$$\vec{u}(t) = c_+ \vec{v}_+ e^{(a+b)t} + c_- \vec{v}_- e^{(a-b)t}$$

es decir, definiendo  $\alpha_{\pm} = c_{\pm}/\sqrt{2}$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_+ e^{(a+b)t} - \alpha_- e^{(a-b)t}, \\ y(t) &= \alpha_+ e^{(a+b)t} + \alpha_- e^{(a-b)t} \end{aligned} \quad (106)$$

Para  $|b| < |a|$ , el acoplamiento  $b$  puede pensarse como una “perturbación” que produce un “desdoblamiento” del ritmo de crecimiento ( $a > 0$ ) o decaimiento ( $a < 0$ ) de  $x$  e  $y$ , originando dos componentes en la soluc. gral. para estas variables. Podemos obtener las soluciones anteriores directamente planteando una solución del tipo  $\vec{u} = \vec{v}e^{\lambda t}$ , lo que conduce a la ec. de autovalores  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ .

Escribiendo  $A = VA'V^{-1}$ , con

$$A' = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos también

$$\exp[At] = V \exp[A't]V^{-1} = e^{at} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & \sinh(bt) \\ \sinh(bt) & \cosh(bt) \end{pmatrix}$$

Las columnas de esta matriz son las soluciones  $\vec{u}_1(t)$ ,  $\vec{u}_2(t)$ , que satisfacen  $\vec{u}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , y corresponden a  $\alpha_+ = 1$ ,  $\alpha_- = \mp 1$  en (106). Si  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = 0$ , la solución es  $x_0 \vec{u}_1(t)$ , o sea,

$$x(t) = x_0 e^{at} \cosh(bt), \quad y(t) = x_0 e^{at} \sinh(bt) \quad (107)$$

Debido al acoplamiento  $b$ ,  $y(t)$  adquiere un valor no nulo al aumentar  $t$ .

Las soluciones (106) pueden interpretarse mejor en términos de las nuevas variables

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

que satisfacen las ec. *desacopladas*

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (a+b)\tilde{x} \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = (a-b)\tilde{y} \quad (108)$$

## I.2 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES

---

Las soluciones de (108) son obviamente

$$\tilde{x}(t) = c_+ e^{(a+b)t}, \quad \tilde{y}(t) = c_- e^{(a-b)t} \quad (109)$$

Como  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\tilde{x} \mp \tilde{y})/\sqrt{2}$ , las soluciones (106) se obtienen inmediatamente de (109). Las constantes  $c_{\pm}$  no son otra cosa que los valores iniciales  $\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)$ .

Todas las fórmulas anteriores permanecen válidas para matrices  $A$  complejas. Por ej., la ec. de Schrödinger para un sistema de dos niveles degenerados de energía  $\varepsilon$  e interacción  $\alpha$  es

$$i\hbar \frac{d\vec{u}}{dt} = H\vec{u}, \quad H = \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha \\ \alpha & \varepsilon \end{pmatrix}$$

donde  $H$  es la matriz que representa al Hamiltoniano y  $\vec{u}(t)$  la función de onda. Corresponde a  $a = -i\varepsilon/\hbar, b = -i\alpha/\hbar$  en (105). La ec. (107) conduce a

$$|x(t)|^2 = |x_0|^2 \cos^2(\alpha t/\hbar), \quad |y(t)|^2 = |x_0|^2 \sin^2(\alpha t/\hbar)$$

Debido a la interacción  $\alpha$ , el sistema oscila pues entre los dos niveles con frecuencia  $f = \alpha/(2\pi\hbar)$ .

*Caso general.* Una matriz cuadrada arbitraria puede siempre descomponerse en la forma  $A = V A' V^{-1}$ , con

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & D_m \end{pmatrix}$$

donde  $D_k$  son bloques de  $n_k \times n_k$  de la forma

$$\begin{aligned} D_k &= \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \\ &= \lambda_k I_k + J_k, \quad J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con  $\lambda_k$  autovalor de  $A$  ( $\text{Det}[A - \lambda_k I] = 0$ ) y  $I_k$  la identidad de  $n_k \times n_k$  ( $\sum_{k=1}^m n_k = n$ ). Esta forma se denomina *descomposición de Jordan*, y el caso diagonalizable corresponde a  $n_k = 1 \forall k$ . Como  $AV = V A'$ , las columnas  $\vec{v}_i^k$  de  $V$  correspondientes al bloque  $k$  quedan determinadas, si  $n_k \geq 2$ , por

$$A\vec{v}_1^k = \lambda_k \vec{v}_1^k, \quad A\vec{v}_i^k = \lambda_k \vec{v}_i^k + \vec{v}_{i-1}^k, \quad i = 2, \dots, n_k$$



La matriz  $J_k$  es nilpotente:  $J_k^{n_k} = 0$ . Por lo tanto, como  $[I_k, J_k] = 0$ ,

$$\begin{aligned} \exp[D_k t] &= \exp[\lambda_k I_k t] \exp[J_k t] \\ &= e^{\lambda_k t} \left[ I_k + J_k t + \dots + \frac{(J_k t)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \right] \\ &= e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^{n_k-1}/(n_k-1)! \\ 0 & 1 & \dots & t^{n_k-2}/(n_k-2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (110)$$

Finalmente obtenemos

$$\exp[At] = V \begin{pmatrix} e^{D_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{D_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{D_m t} \end{pmatrix} V^{-1}$$

La solución general (94) es pues de la forma

$$\vec{u}(t) = V \exp[A't] \vec{a} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k \vec{v}_i^k(t)$$

con  $\vec{v}_1^k(t) = e^{\lambda_k t} \vec{v}_1^k$ ,  $\vec{v}_2^k(t) = e^{\lambda_k t} (\vec{v}_2^k + \vec{v}_1^k t)$ , y en general,

$$\vec{v}_i^k(t) = e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^i \vec{v}_j^k \frac{t^{i-j}}{(i-j)!}$$

con  $\vec{a} = V^{-1} \vec{c}$ . Es entonces suma de exponenciales  $e^{\lambda_k t}$  multiplicadas por potencias de  $t$  menores que  $n_k$ . Esta solución puede interpretarse en términos del vector  $\tilde{\vec{u}} = V^{-1} \vec{u}$ , que satisface la ec.  $d\tilde{\vec{u}}/dt = A' \tilde{\vec{u}}$ , o sea,

$$\frac{d\tilde{u}_i^k}{dt} = \lambda_k \tilde{u}_i^k + \tilde{u}_{i+1}^k, \quad i = 1, \dots, n_k - 1, \quad \frac{d\tilde{u}_{n_k}^k}{dt} = \lambda_k \tilde{u}_{n_k}^k$$

para el bloque  $k$ . Las soluciones de este sistema son precisamente las columnas de la matriz (110). No es posible ahora desacoplar completamente el sistema.

Ejemplo:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = ay \quad (111)$$

En este caso

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI + bJ_2$$

## I.2 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES

---

y la ec. característica  $\text{Det}[A - \lambda I] = (a - \lambda)^2 = 0$ , posee una única raíz  $\lambda = a$ . Esta matriz no es diagonalizable. No obstante,

$$\exp[At] = \exp[aIt] \exp[bJ_2t] = \begin{pmatrix} e^{at} & be^{at}t \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \quad (112)$$

La primera columna nos da la solución que satisface  $\vec{u}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y la segunda  $\vec{u}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La solución general puede entonces escribirse como

$$\vec{u}(t) = c_1 e^{at} \vec{v}_1 + c_2 e^{at} (\vec{v}_2 + t\vec{v}_1) \quad (113)$$

con  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{-1} \end{pmatrix}$ , que satisfacen  $A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1$ ,  $A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ . El sistema (111) puede también tratarse en forma elemental resolviendo primero la ec. para  $y$  y luego la ec. para  $x$ .

*Nota.* La matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \varepsilon & a \end{pmatrix}$  es diagonalizable si  $b\varepsilon \neq 0$ . En este caso, la ec.  $\text{Det}[A - \lambda I] = (\lambda - a)^2 - b\varepsilon = 0$  conduce a  $\lambda_{\pm} = a \pm \sqrt{b\varepsilon}$ , con autovectores  $\vec{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm}/b \end{pmatrix}$ , obteniéndose

$$\exp[At] = e^{at} \begin{pmatrix} \cosh(rt) & \frac{b}{r} \sinh(rt) \\ \frac{r}{b} \sinh(rt) & \cosh(rt) \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{b\varepsilon}$$

Tomando el límite  $r \rightarrow 0$  se obtiene la ec. (112).

Ahora que sabemos exponenciar matrices, podemos volver al sistema de ec. lineales (70).

Si  $[A(t), A(t')] = 0 \forall t, t' \in I_0$ , obtenemos

$$U(t) = \exp \left[ \int_{t_0}^t A(t') dt' \right] U_0 \quad (114)$$

En efecto, en este caso no importa el orden temporal en los términos del desarrollo (79). Se obtiene

$$\int_{t_0}^t A(t') dt' \int_{t_0}^{t'} A(t'') dt'' = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t A(t') dt' \int_{t_0}^t A(t'') dt''$$

ya que  $A(t')A(t'') = A(t'')A(t')$ . Análogamente,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2) dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 \int_{t_0}^t A(t_2) dt_2 \dots \int_{t_0}^t A(t_n) dt_n \end{aligned}$$

y, por lo tanto, el desarrollo (79) conduce a (114).

En el caso general, la ec. (79) suele escribirse como

$$U(t) = \hat{T} \exp \left[ \int_{t_0}^t A(t') dt' \right] U_0 \quad (115)$$

donde  $\hat{T}$  es el operador de “ordenamiento temporal”:  $\hat{T}[A(t)A(t')] = \begin{cases} A(t)A(t') & \text{si } t > t' \\ A(t')A(t) & \text{si } t < t' \end{cases}$  con definición análoga para un producto de más de dos términos.

### I.2.5. Ecuación diferencial lineal de orden $n$

Consideremos primero la ec. *homogénea* de orden  $n$

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{du}{dt} + a_0(t) u = 0 \quad (116)$$

Escribiendo  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ du/dt \\ \dots \\ d^{n-1}u/dt^{n-1} \end{pmatrix}$ , (116) es equivalente al sistema lineal de primer orden

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Si los coeficientes  $a_i(t)$  son continuos en un intervalo  $I_0$ , los teoremas de existencia y superposición aseguran la existencia de  $n$  soluciones linealmente independientes  $\mathbf{u}_i(t)$  para  $t \in I_0$ . Esto implica aquí la existencia de  $n$  *soluciones linealmente independientes*  $u_i(t)$  de (116), ya que las sig. componentes de  $\mathbf{u}_i(t)$  son las derivadas de la primer componente  $u_i(t)$ . Más aún, el determinante

$$W(u_1, \dots, u_n) = \text{Det}[U(t)] = \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ \frac{du_1}{dt} & \dots & \frac{du_n}{dt} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}u_1}{dt^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}u_n}{dt^{n-1}} \end{vmatrix}$$

denominado usualmente *Wronskiano*, es no nulo  $t \in I_0$ , que constituye una condición *más fuerte* que la mera independencia lineal de las funciones  $u_i(t)$  (notemos que  $W$  puede ser nulo aún si las funciones  $u_1(t), \dots, u_n(t)$  son l.i.: si  $u_1 = t, u_2 = t^2, W(u_1, u_2) = t^2$  se anula para  $t = 0$ ; más aún, si  $u_1(t) = \begin{cases} t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, u_2 = \begin{cases} t^2 & t \geq 0 \\ t^2 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow W(u_1, u_2) = 0 \forall t$ ; estas funciones no pueden ser pues soluciones l.i. de la ec. (116) para  $n = 2$  si los coef.  $a(t)$  son continuos).

Una solución particular  $\mathbf{u}(t) = U(t)\mathbf{c}$  queda aquí completamente determinada, para  $t \in I_0$ , por los valores iniciales de  $u$  y de sus primeras  $n - 1$  derivadas.

*Caso de coeficientes constantes*

Consideremos ahora el importante caso en que  $a_i(t) = a_i$ , constante, para  $i = 0, \dots, n-1$  en (116). La matriz  $A$  es constante y las soluciones serán pues del tipo  $u(t) = e^{\lambda t}$  o  $e^{\lambda t} t^j$ , con  $j$  entero. La ec. característica es

$$\text{Det}[\lambda I - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (117)$$

que puede obtenerse directamente planteando una solución exponencial  $u(t) = ce^{\lambda t}$  en (116).

Si las raíces de (117) son todas distintas, un conjunto de soluciones l.i. es  $\{u_k(t) = e^{\lambda_k t}, k = 1, \dots, n$  y la solución gral. es

$$u(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t}$$

Las constantes  $c_k$  pueden determinarse a partir de las  $n$  condiciones iniciales

$$u^{(j)}(0) \equiv \left. \frac{d^j u}{dt^j} \right|_{t=0} = u_0^j, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (118)$$

En el caso general, podemos escribir (117) en la forma

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{n_m} = 0$$

donde  $n_k$  es la multiplicidad de la raíz  $\lambda_k$  ( $\sum_{k=1}^m n_k = n$ ). Por lo tanto (116) puede escribirse como

$$\left[ \left( \frac{d}{dt} - \lambda_1 \right)^{n_1} \left( \frac{d}{dt} - \lambda_2 \right)^{n_2} \dots \left( \frac{d}{dt} - \lambda_m \right)^{n_m} \right] u = 0 \quad (119)$$

donde  $\left( \frac{d}{dt} \right)^j = \frac{d^j}{dt^j}$ . Dado que  $\left( \frac{d}{dt} - \lambda_k \right) e^{\lambda_k t} = 0 \Rightarrow \left( \frac{d}{dt} - \lambda_k \right) (e^{\lambda_k t} t^j) = j e^{\lambda_k t} t^{j-1}$  y

$$\left( \frac{d}{dt} - \lambda_k \right)^{n_k} (e^{\lambda_k t} t^j) = 0, \quad j = 0, \dots, n_k - 1$$

Un conjunto de  $n$  soluciones l.i. de (119) es entonces  $\{e^{\lambda_k t} t^j, j = 0, \dots, n_k - 1, k = 1, \dots, m$ , y la solución general es

$$u(t) = \sum_{k=1}^m e^{\lambda_k t} \sum_{j=0}^{n_k-1} c_{kj} t^j$$

Las constantes  $c_{kj}$  pueden determinarse nuevamente a partir de las condiciones iniciales (118).

*Ejemplo: Ec. lineal de 2º orden con coef. constantes*

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2a\frac{du}{dt} + bu = 0 \quad (120)$$

Para  $a = \gamma/(2m) > 0$ ,  $b = k/m > 0$ , esta ec. determina la posición  $u(t)$  de una partícula de masa  $m$  unida a un resorte de constante  $k > 0$  en un medio viscoso con fuerza de rozamiento prop. a la velocidad ( $m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku - \gamma\frac{du}{dt}$ ).

Las raíces de la ec. característica  $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$  son

$$\lambda_{\pm} = -a \pm r, \quad r = \sqrt{a^2 - b}$$

Si  $r \neq 0$ , la solución general es entonces

$$u(t) = c_+e^{\lambda_+t} + c_-e^{\lambda_-t} \quad (121)$$

y la solución para  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = v_0$  es

$$u(t) = e^{-at} \left[ u_0 \cosh(rt) + \frac{v_0 + au_0}{r} \sinh(rt) \right] \quad (122)$$

Si  $r = 0$  ( $a^2 = b$ ) la soluc. gral. es  $u(t) = c_1e^{-at} + c_2e^{-at}t$  y la soluc. que satisface  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = v_0$  es

$$u(t) = e^{-at} [u_0 + (v_0 + au_0)t]$$

que puede obtenerse de (122) tomando el límite  $r \rightarrow 0$ .

Si  $a^2 > b$ ,  $r$  es real y por lo tanto  $\lambda_{\pm}$  son reales. En el caso de la partícula, esto corresponde a  $\gamma > \sqrt{4mk}$ , es decir, a amortiguamiento fuerte. Las ec. (121) o (122) describen en este caso una disminución *exponencial* de  $u(t)$ , ya que  $\lambda_{\pm} < 0$  ( $r < a$ ). El sistema *no* realiza oscilaciones. El caso límite  $a^2 = b$  corresponde a  $\gamma = \sqrt{4mk}$ , donde tampoco se producen oscilaciones.

Si  $a^2 < b$ ,  $r = i\omega$ , con  $\omega = \sqrt{b - a^2}$  real y  $\cosh(rt) = \cos(\omega t)$ ,  $\sinh(\omega t) = i \sin(\omega t)$  en (122), por lo que

$$u(t) = e^{-at} \left[ u_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + au_0}{\omega} \sin(\omega t) \right] \quad (123)$$

En el caso de la partícula, esto corresponde a  $\gamma < \sqrt{4mk}$ , es decir, a amortiguamiento débil. Las ec. (122) o (123) representan en este caso un movimiento oscilatorio *amortiguado*, con “frecuencia. angular  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{4mk} \right)}$  y una amplitud que disminuye exponencialmente (proporcional a  $e^{-\gamma t/(2m)}$ ).

*Ejemplo: Ecuación de Euler*

$$t^n \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} t^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 t \frac{du}{dt} + b_0 u = 0$$

Podemos llevar esta ec. a la forma (116) con  $a_i$  constante mediante el cambio de variables  $t \rightarrow e^z$ . Tenemos  $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt} = t^{-1} \frac{du}{dz}$ ,  $\frac{d^2 u}{dt^2} = t^{-2} [\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{du}{dz}]$ , y en general,

$$\frac{d^m u}{dt^m} = t^{-m} \sum_{i=1}^m \alpha_{im} \frac{d^i u}{dz^i}$$

con  $\alpha_{im}$  constante (y  $\alpha_{mm} = 1$ ). Por lo tanto, en la variable  $z$  se obtiene una ec. del tipo (116) con  $a_0 = b_0$  y  $a_i = \sum_{m=i}^n \alpha_{im}$  para  $i = 1, \dots, n-1$ . Las soluciones son entonces de la forma  $u(t) = e^{\lambda z} = t^\lambda$ , con  $\lambda$  determinado por la ec. (117), o en general,  $e^{\lambda z} z^k = t^\lambda (\ln t)^k$ , y  $k = 1, \dots, m-1$ , con  $m$  la multiplicidad. Los valores de  $\lambda$  pueden también hallarse directamente reemplazando en la ec. de Euler una solución de la forma  $u(t) = t^\lambda$ .

Por ejemplo, si

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + t \frac{du}{dt} - a^2 u = 0$$

reemplazando  $u = t^\lambda$  obtenemos  $\lambda(\lambda-1) + \lambda - a^2 = 0$ , cuyas raíces son  $\lambda_\pm = \pm a$ . Para  $a \neq 0$ , la soluc. gral. es

$$u(t) = c_+ t^a + c_- t^{-a}$$

y la soluc. para  $u(1) = u_1$ ,  $u'(1) = v_1$  es

$$u(t) = \frac{1}{2} [u_1 (t^a + t^{-a}) + \frac{v_1}{a} (t^a - t^{-a})] \quad (124)$$

Si  $a \rightarrow 0$ , la solución general es  $c_1 + c_2 \ln t$  y la solución para  $u(1) = u_1$ ,  $u'(1) = v_1$  es  $u(t) = u_1 + v_1 \ln t$ , que puede obtenerse tomando el límite de (124) para  $a \rightarrow 0$ .

Si  $a = i|a|$ ,  $t^a = \cos(|a| \ln t) + i \sin(|a| \ln t)$  y  $u(t) = u_1 \cos(|a| \ln t) + \frac{v_1}{a} \sin(|a| \ln t)$ .

**Apéndice: Método general para hallar la segunda solución de una ecuación lineal de 2do orden homogénea**

Supongamos que se conoce una solución  $u_1(t)$  de la ecuación lineal

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0 \tag{125}$$

La otra solución lin. indep. puede hallarse planteando una solución del tipo

$$u_2(t) = v(t)u_1(t)$$

En efecto, reemplazando esta expresión en (125) obtenemos para  $v$  la ec.

$$u_1(t)v'' + (2u_1'(t) + a(t)u_1(t))v' = 0$$

que es una ec. lineal de primer orden en  $v'$ . Su solución es  $v'(t) = cu_1^{-2}(t)e^{-\int a(t)dt}$ , de donde

$$v(t) = c \int e^{-\int a(t)dt} / u_1^2(t) dt \tag{126}$$

Aunque no resulta siempre el método más cómodo, puede aplicarse para cualquier  $a(t)$ . Nótese que  $v(t)$  no depende explícitamente de  $b(t)$ . El método puede utilizarse también para determinar el comportamiento de la segunda solución en la vecindad de puntos singulares.

Como ej. simple, consideremos la ec.  $u'' - k^2u = 0$ , cuyas soluciones son  $u(t) = c_{\pm}e^{\pm kt}$ . Si  $u_1(t) = e^{kt} \Rightarrow v(t) \propto e^{-2kt}$ , de donde  $u_2(t) \propto e^{-kt}$ . Si tomamos  $u_1(t) = \cosh(kt) \Rightarrow v(t) \propto \tanh(kt)$ , de donde  $u_2(t) = \sinh(t)$ .

*Ecuación lineal no homogénea de orden n*

Consideremos ahora

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{du}{dt} + a_0(t) u = f(t) \quad (127)$$

que puede escribirse como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

A partir de la solución general (3.16), la primer fila de la solución  $\mathbf{u}(t)$  (que es la que importa ya que las restantes son sus derivadas) es entonces

$$u(t) = \sum_{j=1}^n K_{1j}(t, t_0) u_0^j + \int_{t_0}^t K_{1n}(t, t') f(t') dt' \quad (128)$$

donde  $K_{1j}(t, t_0) = [U(t)U^{-1}(t_0)]_{1j}$ , con  $U(t)$  una matriz fundamental de soluciones, y  $u_0^j = u^{(j-1)}(t_0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , son los valores en  $t = t_0$  de  $u$  y sus primeras  $n - 1$  derivadas. El primer término en (128) es pues una solución de la ec. *homogénea* que satisface las cond. iniciales, y el segundo, dado por la integral, es una solución particular de la ec. *inhomogénea* con condiciones iniciales nulas. Dado que  $K(t_0, t_0) = I$  (identidad),  $u_k(t) \equiv K_{1k}(t, t_0)$  es la solución de la ec. *homogénea* (116) que satisface

$$u_k^{(j-1)}(t_0) = \delta_{kj}, \quad j = 1, \dots, n$$

es decir,  $u_1(t)$  es la que satisface  $u_1(t_0) = 1$ , con  $u_1^{(j)}(t_0) = 0$  para  $j = 1, \dots, n - 1$ , y  $u_n(t)$  aquella que sat.  $u_n^{(j)}(t_0) = 0$  para  $j = 0, \dots, n - 2$ , con  $u_n^{(n-1)}(t_0) = 1$ . Esta última es la que determina (para  $t_0 = t'$ ) la solución particular de la ec. *inhomogénea*

En el caso de coeficientes *constantes* ( $a_i(t) = a_i \forall t$ ),  $K(t, t_0) = \exp[A(t - t_0)]$ , con  $K(t_0, t_0) = I$  (identidad) y podemos reescribir (128) como

$$u(t) = \sum_{j=1}^n u_j(t - t_0) u_0^j + \int_{t_0}^t u_n(t - t') f(t') dt'$$

con  $u_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , las soluciones de la ec. *homogénea* que satisfacen  $u_k^{(j-1)}(0) = \delta_{kj}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Por ejemplo, la solución de

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2a \frac{du}{dt} + bu = f(t)$$



## I.2 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES

---

que satisface  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = v_0$  es

$$u(t) = e^{-at} \left[ u_0 \cosh(rt) + \frac{v_0 + au_0}{r} \sinh(rt) \right] + \int_0^t e^{-a(t-t')} \frac{\sinh[r(t-t')]}{r} f(t') dt' \quad (129)$$

con  $r = \sqrt{a^2 - b}$ . Si  $r \rightarrow 0$ , la fracción en (129) se reduce a  $t - t'$  (y si  $r = i\omega$ , a  $\sin[\omega(t - t')]/\omega$ ). Trataremos este tema con mayor profundidad en la próxima clase.

*Apéndice: Reducción del orden de una ec. diferencial*

Consideremos la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}\right)$$

Hemos visto que podemos transformarla en un sistema de dos ec. de primer orden definiendo  $u_1 = u$ ,  $u_2 = \frac{du}{dt}$ , con  $\frac{du_1}{dt} = u_2$ ,  $\frac{du_2}{dt} = f(t, u_1, u_2)$ . Por ejemplo,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

puede escribirse como

$$m \frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = F\left(t, x, p/m\right)$$

En general, cualquier sistema de  $m$  ec. de orden  $n$  puede llevarse a un sistema de  $m \times n$  ec. de primer orden.

En algunos casos simples es posible reducir el orden mediante técnicas elementales sin introducir nuevas variables. Por ejemplo, si  $f$  no depende de  $u$ ,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f\left(t, \frac{du}{dt}\right)$$

puede llevarse a la ec. de primer orden

$$\frac{dw}{dt} = f\left(t, w\right)$$

definiendo  $w = \frac{du}{dt}$ . Si la solución es  $w(t, c)$ , donde  $c$  es una cte. de integración, luego  $u(t) = \int w(t, c) dt + c'$ .

Otro caso es aquel en que  $f$  no depende de la variable independiente,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f\left(u, \frac{du}{dt}\right)$$

Definiendo  $w = \frac{du}{dt}$ , y considerando a  $w$  como función de  $u$ , tenemos  $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{du} \frac{du}{dt} = w \frac{dw}{du}$  y por lo tanto

$$w \frac{dw}{du} = f(u, w)$$

que es una ec. de primer orden. Si la solución es  $w(u, c)$ , podemos hallar  $u(t)$  de  $dt = du/w(u, c)$ , o sea,

$$t - t_0 = \int_{u_0}^u \frac{du}{w(u, c)}$$

que determina  $u(t)$  implícitamente. Este resultado es útil para fuerzas que dependen sólo de la posición, en cuyo caso puede obtenerse directamente de consideraciones energéticas. Ejemplo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$$

## I.2 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES

Si  $p = m \frac{dx}{dt} \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{p}{m} \frac{dp}{dx}$  y la ec. resulta

$$\frac{p}{m} \frac{dp}{dx} = f(x)$$

de donde  $\frac{p}{m} dp = f(x) dx$  y

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} = \int_{x_0}^x f(x') dx' = V(x_0) - V(x)$$

donde  $V(x) = -\int f(x) dx$  es el potencial. Obtenemos la conservación de la energía mecánica,

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E$$

de donde  $p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$ . De  $m \frac{dx}{dt} = p(x)$  obtenemos  $dt = m \frac{dx}{p(x)}$  y finalmente

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}} \quad (130)$$

En el caso de un péndulo simple,  $V(x) = mgl(1 - \cos \theta)$ , con  $x = l\theta$ ,  $p = ml \frac{d\theta}{dt}$ . Si  $t_0 = \theta_0 = 0$ , (130) conduce a

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos \theta' - \cos \theta_m}} \quad (131)$$

donde hemos escrito  $E = mgl[1 - \cos(\theta_m)]$ , con  $\theta \leq \theta_m$ . Podemos de esta forma obtener tanto el período exacto  $T = 4t(\theta_m)$  como también la función  $t(\theta)$ , aún para grandes amplitudes  $\theta_m$ , en términos de funciones elípticas (se dejan las cuentas para el lector). Para  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ , se obtiene el resultado usual  $t = \sqrt{l/g} \arcsin(\theta/\theta_m)$ , i.e.,  $\theta(t) = \theta_m \sin(\sqrt{g/l} t)$ , con  $T = T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ . En el orden siguiente obtenemos  $T = T_0[1 + \theta_m^2/16 + O(\theta_m^4)]$ . La ec. (131) es también válida para  $E > 2mgl$  ( $\cos(\theta_m) < -1$ , o sea,  $\theta_m = \pi + i\alpha$ ).

El mismo procedimiento es también válido para reducir en 1 el orden de la ec. diferencial

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f\left(u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right)$$

Tenemos por ej.,  $\frac{du}{dt} = w$ ,  $\frac{d^2u}{dt^2} = w \frac{dw}{du}$ ,  $\frac{d^3u}{dt^3} = w \frac{d}{du} [w \frac{dw}{du}] = w [(\frac{dw}{du})^2 + w \frac{d^2w}{du^2}]$ , y en geral.,  $\frac{d^n u}{dt^n}$  será una función de las derivadas hasta orden  $n - 1$  de  $w$  respecto de  $u$ . Se obtiene una ec. del tipo

$$\frac{d^{n-1}w}{du^{n-1}} = g\left(u, w, \dots, \frac{d^{n-2}w}{du^{n-2}}\right)$$

obteniéndose luego  $u$  de  $t - t_0 = \int_{u_0}^u \frac{du}{w(u, c_1, \dots, c_{n-1})}$ .

### I.2.6. Breve introducción a Teoría de Distribuciones.

1) *La Delta de Dirac como límite de una secuencia.*

Consideremos la ec. diferencial lineal inhomogénea  $\frac{du}{dt} - au = f(t)$ . Desde un punto de vista intuitivo, parecería razonable representar la inhomogeneidad  $f(t)$  como una suma de términos impulsivos concentrados en intervalos de tiempo muy pequeños, y obtener luego la solución como suma de las soluciones particulares para cada uno de estos términos. La formalización de esta idea requiere el concepto de *distribución* o función generalizada, que discutiremos a continuación.

Consideremos la función

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & |x| \leq \varepsilon/2 \\ 0 & |x| > \varepsilon/2 \end{cases} \quad \varepsilon > 0 \quad (132)$$

Se cumple  $\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$ . Además, si  $f$  es una función continua arbitraria,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x) dx = \varepsilon^{-1} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f(x) dx = \frac{F(\varepsilon/2) - F(-\varepsilon/2)}{\varepsilon}$$

donde  $F$  es una primitiva de  $f$ . Para  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,  $g_\varepsilon(x)$  estará concentrada cerca del origen y obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(\varepsilon/2) - F(-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \quad (133)$$

$$= F'(0) = f(0) \quad (134)$$

Podemos entonces definir la distribución o función generalizada  $\delta(x)$  (delta de Dirac) como el límite

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_\varepsilon(x) \quad (135)$$

que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (136)$$

Si bien el límite (135) no existe estrictamente (es 0 si  $x \neq 0$  y  $\infty$  si  $x = 0$ ) el límite de la integral (133)  $\exists \forall f$  continua en un entorno de  $x = 0$ , y eso es lo que simbolizan las ec. (135)–(136). Puede obtenerse una buena aproximación a  $\delta(x)$  mediante (6.1) tomando  $\varepsilon$  mucho menor que la longitud en la cual  $f$  varía apreciablemente. Físicamente,  $\delta(x)$  puede interpretarse como la densidad lineal de masa correspondiente a una masa puntual de magnitud 1 localizada en el origen.

Notemos también que si  $ab \neq 0$  y  $a < b$ ,

$$\int_a^b \delta(x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b g_\varepsilon(x) f(x) dx = \begin{cases} f(0) & a < 0 < b \\ 0 & \begin{matrix} a < b < 0 \text{ o} \\ 0 < a < b \end{matrix} \end{cases}$$

## I.2 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES

Consideraremos en lo sucesivo *funciones de prueba*  $f$ , que son funciones acotadas y derivables a cualquier orden, y que se anulan fuera de un intervalo *finito*  $I$  (recordemos ante todo que tales funciones existen: si  $f(x) = 0$  para  $x \leq 0$  y  $x \geq 1$ , y  $f(x) = e^{-1/x^2} e^{-1/(1-x)^2}$  para  $|x| < 1$ ,  $f$  es derivable a *cualquier* orden en  $x = 0$  y  $x = 1$ ). En tal caso existen muchas otras funciones  $g_\varepsilon(x)$  que convergen a  $\delta(x)$ , que pueden ser derivables a cualquier orden. Un conocido ejemplo es

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \quad (137)$$

En efecto,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\varepsilon^2} dx = 1 \forall \varepsilon > 0$  y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\varepsilon^2} f(x) dx = f(0) \quad (138)$$

La gráfica de  $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-x^2/2\varepsilon^2}$  es la “campana” de Gauss, con área 1 y dispersión  $\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) x^2 dx = \varepsilon^2$ . Para  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,  $g_\varepsilon(x)$  se concentra alrededor de  $x = 0$ , pero mantiene su área constante.

En general, si  $g_\varepsilon(x)$  está definida  $\forall x \in \mathfrak{R}$  y  $\varepsilon > 0$ , diremos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_\varepsilon(x) = \delta(x) \text{ sii } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x) dx = f(0)$$

$\forall$  función de prueba  $f$ .

Por ejemplo, si  $g(x) \geq 0 \forall x$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} g(x/\varepsilon) = \delta(x)$$

En efecto, si  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(x/\varepsilon) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = 1$  y  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \int_a^b g(x/\varepsilon) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} g(u) du = \begin{cases} 1 & a < 0 < b \\ 0 & a < b < 0 \text{ o } 0 < a < b \end{cases}$ . Por lo tanto, si  $|f(x)| \leq M \forall x$  y  $ab > 0$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \left| \int_a^b g(x/\varepsilon) f(x) dx \right| \leq M \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \int_a^b g(x/\varepsilon) dx = 0$ . De este modo, si  $t > 0$  y  $f$  es continua y acotada,

$$I_f \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(x/\varepsilon) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \int_{-t}^t g(x/\varepsilon) f(x) dx$$

Si  $m_t \leq f(x) \leq M_t$  para  $x \in [-t, t] \Rightarrow m_t \leq I_f \leq M_t \forall t > 0$ , pero por continuidad de  $f$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} M_t = \lim_{t \rightarrow 0^+} m_t = f(0)$ , por lo que  $I_f = f(0)$ .

Ejemplos muy utilizados son (137) y también

$$\delta(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left[ \frac{1}{x + i\varepsilon} \right] = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (139)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2} \quad (140)$$

que corresponden a  $g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$  y  $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{\pi x^2}$ . No obstante, existen también funciones  $g(x)$  no siempre positivas que satisfacen  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} g(x/\varepsilon) = \delta(x)$ . Por ejemplo la fórmula de Dirichlet,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} dx = f(0)$$

corresponde a  $g(x) = \sin(x)/(\pi x)$  e implica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} = \delta(x)$$

aún cuando  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sin(x/\varepsilon)/x$  es no nulo (no existe) para  $x \neq 0$  (sólo es nulo el promedio:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon t} \int_{x_0-t}^{x_0+t} g(x/\varepsilon) dx = 0 \text{ si } 0 < t < |x_0|).$$

### 2) Propiedades básicas de la delta.

La composición de  $\delta(x)$  con otras funciones se define de modo tal que se sigan cumpliendo las reglas usuales de integración. Por ejemplo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f(u + x_0) du = f(x_0) \quad (141)$$

Asimismo, si  $a \neq 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f\left(\frac{u}{a}\right) du = \frac{1}{|a|} f(0)$$

por lo que

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0 \quad (142)$$

En particular,  $\delta(-x) = \delta(x)$ .

Para una función invertible y derivable  $g(x)$  que posee una sólo raíz  $x_1$  ( $g(x_1) = 0$ ), con  $g'(x_1) \neq 0$ , obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x)) f(x) dx = \int_{r_-}^{r_+} \delta(u) \frac{f(g^{-1}(u))}{|g'(g^{-1}(u))|} du = \frac{f(x_1)}{|g'(x_1)|}$$

donde  $(r_-, r_+) \subset$  en la imagen  $g(\mathbb{R})$ , con  $r_{\pm} \geq 0$  y  $g^{-1}(0) = x_1$ . Por lo tanto, en este caso,

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_1)}{|g'(x_1)|} \quad (143)$$

En general, para una función  $g(x)$  derivable con raíces aisladas  $x_n$  y  $g'(x_n) \neq 0$  tenemos

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (144)$$

Sin embargo  $\delta(x^2)$  y en general,  $\delta(x^n)$ ,  $n > 1$ , no están definidas para funciones de prueba arbitrarias. Tampoco lo está el producto  $\delta(x)\delta(x) = [\delta(x)]^2$ . Notemos también que si  $g(x)$  es una función de prueba,

$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x) \quad (145)$$

*Derivadas de  $\delta(x)$ .* Si queremos que se siga cumpliendo la integración por partes, podemos definir también la derivada  $\delta'(x)$  t.q. (recordar que  $f$  se anula fuera de un intervalo finito)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)f(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f'(x)dx = -f'(0)$$

y en general, la derivada enésima  $\delta^{(n)}(x)$  t.q.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)f(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

De este modo,

$$f'(x_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x_0)f(x)dx \quad (146)$$

$$f^{(n)}(x_0) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x - x_0)f(x)dx \quad (147)$$

Notemos también que si  $a \neq 0$ ,

$$\delta^{(n)}(ax) = \frac{1}{a^n |a|} \delta^{(n)}(x)$$

En particular,  $\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n \delta^{(n)}(x)$ .

Se deja al lector probar que:

$$\begin{aligned} g(x)\delta'(x) &= g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x), \\ [\delta(x)g(x)]' &= \delta'(x)g(x) + \delta(x)g'(x) = g(0)\delta'(x), \\ [\delta(g(x))]' &= \delta'(g(x))g'(x). \end{aligned}$$

### 3) Función de Heaviside.

Consideremos la función “escalón”

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (148)$$

Mostraremos que efectivamente  $H'(x) = \delta(x)$  (lo que es intuitivamente razonable) de modo que  $H(x)$  representa la “primitiva” de  $\delta(x)$ , al menos en forma simbólica. En efecto, para una función de prueba  $f(x)$ , obtenemos, integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(x)f(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f'(x)dx = - \int_0^{\infty} f'(x)dx = f(0)$$

de modo que

$$H'(x) = \delta(x)$$

Mediante  $H(x)$  podemos escribir una integral en un intervalo finito como una integral en toda la recta, donde los límites quedan determinados por el integrando:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(b-x)f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} [H(b-x) - H(a-x)]f(x)dx$$

#### 4) Tratamiento formal. Teoría de distribuciones

Consideremos primero un espacio  $V$  de vectores de dimensión *finita*, tal como  $R^n$ . Podemos definir una forma o funcional lineal como una función  $L : V \rightarrow \mathfrak{R}$  que asigna a cada vector  $\vec{u} \in V$  un número real  $L(\vec{u})$  y que satisface

$$L(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2) = c_1L(\vec{u}_1) + c_2L(\vec{u}_2)$$

Puede mostrarse que  $\exists$  un único vector  $\vec{l}$  t.q.

$$L(\vec{u}) = (\vec{l}, \vec{u})$$

$\forall \vec{u} \in V$ , donde  $(\vec{l}, \vec{u})$  denota el *producto interno* de dos vectores ( $(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$ , con  $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$  sólo si  $\vec{u} = \vec{0}$ ,  $(\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v})^*$ ,  $(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2, \vec{u}) = c_1^*(\vec{v}_1, \vec{u}) + c_2^*(\vec{v}_2, \vec{u})$ ). Por ej., en  $R^n$ , podemos considerar  $(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (producto escalar) y en  $C^n$ ,  $(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{v}^* \cdot \vec{u}$ .

Expandiendo  $\vec{u}$  en una base *ortonormal* de vectores  $\vec{v}_i, i = 1, \dots, n$ , t.q.  $(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \delta_{ij}$ , tenemos  $\vec{u} = \sum_{i=1}^n c_i\vec{v}_i$  y

$$L(\vec{u}) = \sum_i c_i L(\vec{v}_i) = \sum_i c_i l_i = (\vec{l}, \vec{u})$$

donde  $l_i = L(\vec{v}_i)$  y  $\vec{l} = \sum_i l_i^* \vec{v}_i$ . De modo que toda forma lineal  $L$  en un espacio de dim. finita con producto interno puede ser identificada con un vector  $\vec{l}$  del espacio.

En espacios de dimensión infinita, tal identificación *no es siempre posible*. Consideremos por ej. el espacio de funciones “de prueba”  $D$  formado por funciones reales  $f(x)$  que poseen derivadas de cualquier orden y se anulan fuera de un intervalo finito. Podemos definir el producto interno

$$(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Consideremos ahora el funcional lineal  $L$  que asigna a cada función un número real, con

$$L[c_1f_1 + c_2f_2] = c_1L[f_1] + c_2L[f_2]$$



donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Para toda función  $g(x) \in D$  podemos asociar el funcional lineal  $L_g$ , tal que

$$L_g[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Pero podemos también definir el funcional  $\delta$  t.q.

$$\delta[f] = f(0)$$

aunque es obvio que *no existe*  $g \in D$  que satisfaga

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = f(0)$$

$\forall f \in D$ . El espacio de funcionales es pues “más grande” que el de las funciones  $f$ . No obstante, por comodidad podemos introducir el símbolo  $\delta(x)$  asociado al funcional anterior, t.q.

$$\delta[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

Se define la derivada de  $L$  como

$$L'[f] = -L[f']$$

para que se siga cumpliendo formalmente la integración por partes. De esta forma,

$$L_{g'}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)f(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f'(x)dx = L'_g[f]$$

y en particular,

$$\delta'[f] = -\delta[f'] = -f'(0)$$

La funcional de Heaviside se define como

$$H[f] = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

que corresponde a  $g(x) = H(x)$ , con

$$H'[f] = -H[f'] = -\int_0^{\infty} f'(x)dx = f(0)$$

Por lo tanto,  $H' = \delta$ .

Por ejemplo, puede demostrar el lector que, considerando a  $|x|$  una distribución,

$$\frac{d|x|}{dx} = H(x) - H(-x), \quad \frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x)$$

*Las distribuciones son funcionales lineales continuas sobre  $D$ .* La continuidad significa que si  $f_n(x)$  es una sucesión de funciones t.q. para  $n \rightarrow \infty$   $f_n$  y sus derivadas tienden a 0

uniformemente  $\Rightarrow L[f_n] \rightarrow 0$ . Las distribuciones forman pues un *espacio vectorial* (denominado el espacio *dual* de  $D$ ). Para un espacio finito el dual es equivalente al espacio, pero esto no es necesariamente válido para un espacio de dimensión infinita.

Se dice que una distribución  $L$  se anula en un intervalo  $I$  si  $L[f] = 0 \forall f$  que sea no nula sólomente en  $I$ . En tal caso,  $L[f]$  no dependerá de los valores que tome  $f$  en  $I$ . Con esta definición, podemos decir que  $\delta(x) = 0 \forall x \neq 0$  y que  $H(x) = 0$  si  $x < 0$ . El *soporte* de una distribución es el conjunto cerrado de puntos donde  $L$  no se anula (o sea, el conjunto cerrado más chico fuera del cual  $L$  se anula). De esta forma, el soporte de  $\delta(x)$  es el punto  $x = 0$  mientras que el soporte de  $H(x)$  es el semieje  $x \geq 0$ . El *soporte singular* de una distribución  $L_g$  es el conjunto cerrado más chico fuera del cual  $L$  es equivalente a una función  $g(x)$  derivable a cualquier orden. El soporte singular de  $\delta(x)$  (y también  $H(x)$ ) es pues el punto  $x = 0$ .

### I.2.7. Matriz de Green como distribución.

Podemos ahora volver a la definición de nuestra matriz de Green en la ecuación (88), y escribirla como distribución

$$G(t, t') \equiv K(t, t')H(t - t')$$

donde

$$K(t, t') = U(t)U^{-1}(t')$$

y  $U(t)$  es una matriz fundamental del sistema.

En el caso del sistema lineal de  $n$  ecuaciones,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} - A(t)\vec{u} = \vec{f}(t), \quad (149)$$

es decir,

$$L[\vec{u}(t)] = \vec{f}(t), \quad L = I \frac{d}{dt} - A(t),$$

con  $\vec{u}, \vec{f}$  de  $n \times 1$  y  $A$  de  $n \times n$ ,

Dado que  $K(t, t') = 0$  es solución de la ecuación homogénea,  $G(t, t')$  satisface

$$L[G(t, t')] = I\delta(t - t')$$

donde  $I$  es la identidad de  $n \times n$ , con  $G(t, t') = 0$  para  $t \rightarrow t'^-$ . La solución de (149) para  $\vec{u}(t_0) = \vec{0}$  y  $t_0 \rightarrow -\infty$  puede entonces escribirse como

$$\vec{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t')\vec{f}(t')dt'$$

En particular, si  $\vec{f}(t) = \vec{f}_0\delta(t - t')$ , con  $\vec{f}_0$  constante,

$$\vec{u}(t) = G(t, t')\vec{f}_0$$

es decir,

$$u_i(t) = \sum_j G_{ij}(t, t') f_{0j}$$

El elemento de matriz  $G_{ij}(t, t')$  representa pues el efecto en el tiempo  $t$  en la componente  $i$  de una fuente puntual actuando en el tiempo  $t'$  en la componente  $j$ . Como

$$\lim_{t \rightarrow t'^+} G(t, t') = I$$

para  $t > t'$  la columna  $j$  de  $G(t, t')$  es la solución del sistema *homogéneo* con la condición inicial  $u_i(t') = \delta_{ij}$ . Esto puede utilizarse para hallar  $G(t, t')$ .

*Matriz constante.* Si  $A(t) = A$ , constante  $\Rightarrow U(t) = \exp[At]U_0$  y  $K(t, t') = \exp[A(t-t')$ ], por lo que

$$G(t, t') = \exp[A(t-t')]H(t-t')$$

Es en este caso una función de  $t - t'$  debido a la invariancia de la ec. homogénea frente a traslaciones temporales, y se la escribe como  $G(t - t')$ .

### I.2.8. Función de Green para ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$

Consideremos primero el caso particular de una única ecuación lineal inhomogénea de primer orden

$$\frac{du}{dt} - a(t)u = f(t)$$

es decir,

$$L[u(t)] = f(t) \tag{150}$$

con  $L = \frac{d}{dt} - a(t)$  un operador lineal. Hemos visto que la solución para  $u(t_0) = u_0$  es

$$u(t) = K(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t K(t, s)f(s)ds \tag{151}$$

con

$$K(t, t') = \exp\left[\int_{t'}^t a(s)ds\right] = u_h(t)/u_h(t')$$

y  $u_h(t) = \exp\left[\int a(t)dt\right]$  una solución arbitraria de la ec. homogénea. Consideremos ahora el caso en que  $t_0 \rightarrow -\infty$ , con  $u_0 = 0$ , y

$$f(t) = \delta(t - t')$$

Obtenemos, si  $t \neq t'$ ,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t K(t, s)\delta(s - t')ds = \begin{cases} K(t, t') & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

La solución anterior es la *función de Green causal* del problema y se la define  $\forall t$  en la forma

$$G(t, t') \equiv K(t, t')H(t - t') \quad (152)$$

La función de Green desempeña un papel central en la descripción matemática de fenómenos físicos, y se la denomina a veces también función respuesta. La ec. (152) representa la respuesta del sistema en  $t$  frente a una fuente puntual actuando en  $t'$ , estando el sistema en reposo para  $t < t'$ . Debe considerársela como una *distribución*. Queda definida por la ec.

$$L[G(t, t')] = \delta(t - t') \quad (153)$$

y la condición inicial  $G(t, t') = 0$  si  $t \rightarrow t'^-$ . Puede verificarse que la ec. (152) satisface (153), tanto por derivación de la distribución  $K(t, t')H(t - t')$  como por aplicación del primer miembro de (153) a una función de prueba arbitraria. Se dejan los detalles para el lector. Para  $t > t'$ ,  $G(t, t')$  es la solución de la ec. *homogénea* con la condición inicial  $\lim_{t \rightarrow t'^+} G(t, t') = K(t', t') = 1$ . Recordemos también que, a diferencia de  $G(t, t')$ ,  $K(t, t')$  es solución del sistema homogéneo:  $L[K(t, t')] = 0 \forall t$ .

La solución de (193) con la condición inicial  $u_0 = 0$   $t_0 = -\infty$  puede entonces escribirse como

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t')f(t')dt' \quad (154)$$

done el límite superior puede extenderse hasta  $\infty$  ya que  $G(t, t')$  es nula para  $t' > t$ . Dado que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta(t - t')dt'$$

la ec. (154) puede interpretarse como la suma de las soluciones particulares para cada uno de los términos  $f(t')\delta(t - t')$ . Utilizando (153) puede verificarse inmediatamente que  $L[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t')f(t')dt' = f(t)$ .

El operador lineal  $G$  definido por

$$G[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t')f(t')dt'$$

desempeña entonces el papel de *inversa* del operador  $L$ , ya que  $L[G[f(t)]] = f(t) \forall$  función de prueba  $f(t)$ . Notemos que si nos restringimos a soluciones que cumplen  $u(t_0) = 0$ , con  $t_0 = -\infty$ , la solución dada por (154) es la única solución de (193). Notemos también que la aplicación de  $L$  a una función de prueba  $u(t)$  puede escribirse en forma similar en términos de una distribución  $L(t, t')$ :  $L[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} L(t, t')u(t')dt'$ , con  $L(t, t') = \delta'(t - t') - a(t)\delta(t - t')$ .

Si  $a(t)$  depende de  $t$ , el operador  $L$  no es invariante frente a traslaciones temporales por lo que  $G(t, t')$  dependerá en general de  $t$  y  $t'$  y no sólo de  $t - t'$ . Por ej. si  $a(t) = -2t$ ,  $G(t, t') = e^{-(t+t')(t-t')}H(t - t')$ . En cambio, si  $a(t) = a$ , *constante*,  $L$  es invariante frente

a traslaciones en el tiempo, por lo que  $G(t, t')$  dependerá sólo de la *diferencia*  $t - t'$ . En este caso,

$$G(t, t') = e^{a(t-t')} H(t - t')$$

y se la escribe normalmente como  $G(t - t')$ .

Mencionemos finalmente que la solución general (151) puede escribirse para  $t > t_0$  también como

$$u(t) = G(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{\infty} G(t, t')f(t')dt', \quad t > t_0$$

### Caso General: Ecuación diferencial Lineal de orden $n$

Consideremos la ec. lineal de orden  $n$  general

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t)\frac{du}{dt} + a_0(t)u = f(t) \quad (155)$$

que puede escribirse como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - A(t)\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(t),$$

con

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ du/dt \\ \dots \\ d^{n-1}u/dt^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad (156)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad (157)$$

Consideraremos  $a_i(t)$  y  $f(t)$  continuas en un intervalo cerrado  $I$ , en el cual se aplicarán las consideraciones siguientes.

Como  $f(t)$  aparece en la última fila en (156), y sólo nos interesa conocer  $u(t)$ , bastará con evaluar el elemento

$$g(t, t') = G_{1n}(t, t')$$

de la matriz de Green, que satisface la ec.

$$\frac{d^n g}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t)\frac{dg}{dt} + a_0(t)g = \delta(t-t') \quad (158)$$

con  $g(t, t') = 0$  si  $t < t'$ , y que para  $t > t'$  es la solución de la ec. *homogénea* con la condición inicial

$$g(t', t') = 0, \quad \frac{dg}{dt}\Big|_{t=t'} = 0, \dots, \frac{d^{n-2}g}{dt^{n-2}}\Big|_{t=t'} = 0, \quad \frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}}\Big|_{t=t'} = 1,$$

## I.2 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES

---

(recordemos que  $\lim_{t \rightarrow t'^+} G(t, t') = I$ ). Tanto  $g$  como las derivadas  $\frac{d^k}{dt^k} g(t, t')$  para  $k = 1, \dots, n-2$ , son pues continuas en  $t = t'$ . Sólo la derivada de orden  $n-1$  es discontinua, lo que asegura que se satisfaga (158).

Si tanto  $u$  como sus derivadas se anulan para  $t = t_0$ , y  $t_0 \rightarrow -\infty$ , la solución de la ec. inhomogénea (155) es

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t') f(t') dt'$$

Si  $f(t) = 0$  para  $t \leq 0$ ,  $u(t) = \int_0^{\infty} g(t, t') f(t') dt'$ .

En el caso de coeficientes constantes,

$$g(t, t') = g(t - t'), \quad \text{con} \quad g(t) = \{\exp[At]\}_{1n} H(t) = u_n(t) H(t)$$

donde  $u_n(t)$  es la solución de la ec. homogénea con la condición inicial  $u_n^{(k)}(0) = 0$ ,  $k = 0, \dots, n-2$ ,  $u_n^{(n-1)}(0) = 1$ .

### Ejemplos

1) Ec. lineal de orden 2 con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2a \frac{du}{dt} + bu = f(t) \quad (159)$$

Las raíces de la ec. característica

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$$

son  $\lambda_{\pm} = -a \pm r$ , con  $r = \sqrt{a^2 - b}$ . La solución general de la ec. homogénea es, si  $\lambda_+ \neq \lambda_-$

$$u_h(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} + c_- e^{\lambda_- t}$$

y la solución para  $u(0) = u_0$ ,  $v(0) = v_0$  es

$$u_h(t) = e^{-at} \left[ u_0 \cosh(rt) + \frac{v_0 + au_0}{r} \sinh(rt) \right] \quad (160)$$

La función de Green se obtiene reemplazando  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$  y multiplicando por  $H(t)$ :

$$g(t) = \frac{1}{r} e^{-at} \sinh(rt) H(t) \quad (161)$$

y satisface

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + 2a \frac{dg}{dt} + bg = \delta(t)$$

Si  $r = 0$  ( $\lambda_+ = \lambda_-$ ) la solución de la ec. homogénea para  $u(0) = 0$ ,  $v(0) = 1$  es  $u_h(t) = e^{-at} t$  y entonces

$$g(t) = e^{-at} t H(t) \quad (162)$$

## I.2 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES

resultado que puede obtenerse directamente de (161) tomando el límite  $r \rightarrow 0$ .

Si  $f(t) = 0$  para  $t < 0$  y el sistema está en reposo hasta  $t = 0$ , la solución de (159) para  $t > 0$  es pues

$$u(t) = \frac{1}{r} \int_0^t e^{-a(t-t')} \sinh[r(t-t')] f(t') dt' \quad (163)$$

Como ejemplo físico, podemos considerar la ec. de movimiento clásica de una partícula de masa  $m$  colgada de un resorte en un medio viscoso, en presencia de una fuerza  $F(t)$ :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + ku = F(t)$$

donde  $\gamma > 0$  es el coeficiente de rozamiento dinámico,  $k > 0$  la constante del resorte y  $u$  la coordenada vertical medida desde la posición de equilibrio (el peso  $-mg$  que aparecería en el lado derecho se cancela al efectuar la traslación  $u \rightarrow u - mg/k$ , donde  $mg/k$  es la posición de equilibrio; en forma análoga podemos también cancelar el promedio  $\bar{F}(t)$  en un cierto tiempo). Esta ecuación corresponde a

$$a = \frac{\gamma}{2m}, \quad b = \frac{k}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Si  $a^2 > b$  ( $\gamma^2 > 4mk$ )  $\Rightarrow r$  es real y  $g(t)$  es una combinación de decaimientos exponenciales (como  $r < a$ ,  $a \pm r$  son positivos).

Si  $a^2 = b$  ( $\gamma^2 = 4mk$ )  $\Rightarrow r = 0$  y obtenemos el resultado (162).

Finalmente, si  $a^2 < b$  ( $\gamma^2 < 4mk$ )  $\Rightarrow r$  es imaginario:  $r = i\omega$ , con  $\omega = \sqrt{b - a^2}$  real, y

$$g(t) = \frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t) H(t)$$

que representa un movimiento oscilatorio amortiguado para  $t > 0$ .

Notemos también que si  $a = 0$  (roce nulo),

$$g(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) H(t)$$

representa un movimiento oscilatorio armónico para  $t > 0$ , con  $\omega = \sqrt{b}$ , mientras que si  $a = b = 0$ ,

$$g(t) = tH(t)$$

que representa un movimiento uniforme para  $t > 0$ . Este caso corresponde a la ec.

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = f(t)$$

y su solución para  $t > 0$  y  $u(0) = u'(0) = 0$  es entonces

$$u(t) = \int_0^t (t - t') f(t') dt'$$

que equivale, tras una integración por partes, a

$$u(t) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} f(t'') dt''$$

2) Ec. lineal de orden  $n$  con coeficientes constantes:

La ec. característica es

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Si  $P$  posee  $n$  raíces  $\lambda_k$  distintas, la solución general de la ec. homogénea es

$$u_h(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t}$$

Construyendo la solución particular para  $u^{(i)}(0) = 0$  si  $i = 0, \dots, n-2$ , con  $u^{(n-1)}(0) = 1$ , puede mostrarse que

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_k t}}{P'(\lambda_k)} H(t) \quad (164)$$

Como  $P(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k)$ ,  $P'(\lambda_k) = \prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)$ . Por ejemplo, para  $n = 2$  obtenemos

$$g(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} H(t)$$

Reemplazado  $\lambda_{1,2} = a \pm r$ , se obtiene la ec. (161).

Si existen raíces con multiplicidad  $> 1$ ,  $g(t, t')$  puede obtenerse como límite del resultado (164).

### *Ejemplos importantes de ec. inhomogéneas*

Oscilador armónico de frecuencia propia  $\omega_0$  sujeto a fuerza externa de frecuencia  $\omega$ : Visto en detalle en clase.

3)

$$\frac{du}{dt} - au = f_0 e^{\lambda t} H(t) \quad (165)$$

La solución para  $t > 0$  y  $u(0) = 0$ , es, si  $a \neq \lambda$ ,

$$u(t) = f_0 \int_0^t e^{a(t-t')} e^{\lambda t'} dt' = f_0 \frac{e^{\lambda t} - e^{at}}{\lambda - a} \quad (166)$$

El primer término  $u_p(t) = \frac{f_0}{\lambda - a} e^{\lambda t}$  es una solución particular de la ec. inhomogénea que puede obtenerse directamente reemplazando  $u_p(t) = ce^{\lambda t}$  en (165), lo que conduce a  $c = f_0/(\lambda - a)$ . El segundo término  $u_h(t) = -\frac{f_0}{\lambda - a} e^{at}$  es una solución de la ec. homogénea ajustada para que  $u(0) = 0$ . Si la ec. homogénea describe un decaimiento  $\Rightarrow a < 0$ , en cuyo caso  $u_h(t)$  es un término “transitorio” que se “apaga” al aumentar  $t$ .



Si  $\lambda \rightarrow a$  en (166) obtenemos como límite

$$u(t) = f_0 e^{at} \quad (167)$$

resultado que puede obtenerse directamente de la integral en (166) para  $\lambda = a$ . Notemos la dependencia lineal con  $t$ .

El resultado (166) es válido para cualquier  $\lambda \neq a$ , en particular  $\lambda = i\omega$ , con  $\omega$  real, que corresponde al caso de una fuerza periódica sinusoidal. Si  $a$  y  $f_0$  son reales, la parte real de (166) es la solución para  $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$  y la parte imaginaria para  $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$ . Vemos de (166) que la solución particular oscilará con la *misma* frecuencia externa pero con una amplitud  $f_0/(i\omega - a)$  que depende de la frecuencia, y que tiende a 0 para  $\omega \rightarrow \infty$ .

Por ej., en un circuito con inducción  $L$ , resistencia  $R$  y potencial  $V(t)$ , la corriente  $I$  satisface la ec.

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V(t)$$

que corresponde a  $a = -R/L$ ,  $f(t) = V(t)/L$ . El caso  $\lambda = i\omega$  corresponde a un circuito con corriente alterna  $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$ .

4)

$$\frac{d\vec{u}}{dt} - A\vec{u} = \vec{f}_0 e^{\lambda t} H(t) \quad (168)$$

con  $\vec{u}, \vec{f}_0$  de  $n \times 1$ ,  $A$  de  $n \times n$ . Si  $\vec{u}(0) = \vec{0}$ , la solución para  $t > 0$  es

$$\vec{u}(t) = \int_0^t \exp[A(t-t')] \vec{f}_0 e^{\lambda t'} dt' = \vec{u}_p(t) + \vec{u}_h(t) \quad (169)$$

donde  $\vec{u}_p(t)$  es una solución particular de la ec. inhomogénea y  $\vec{u}_h(t) = \exp[At] \vec{u}_0$  una solución de la ec. homogénea que ajusta la condición inicial. Si  $\lambda$  no coincide con ningún autovalor  $\lambda_k$  de  $A$ ,  $\vec{u}_p(t)$  será de la forma

$$\vec{u}_p(t) = \vec{c} e^{\lambda t}$$

Reemplazando en (168) se obtiene

$$(\lambda I - A) \vec{c} e^{\lambda t} = \vec{f}_0 e^{\lambda t}$$

de donde

$$\vec{c} = (\lambda I - A)^{-1} \vec{f}_0$$

Por lo tanto,  $\vec{u}_h(t) = -\exp[At] \vec{c}$  y

$$\vec{u}(t) = (e^{\lambda t} I - \exp[At]) (\lambda I - A)^{-1} \vec{f}_0, \quad \lambda \neq \lambda_k \quad (170)$$

Para  $\lambda = i\omega \neq \lambda_k$ , obtenemos el conocido e importante resultado que la solución particular de (169) tendrá la *misma* frecuencia que el término inhomogéneo, con una amplitud dependiente de la frecuencia.

En cambio, si  $\lambda$  coincide con un autovalor  $\lambda_k$  de multiplicidad  $n_k$ ,  $(\lambda I - A)$  no es invertible y la solución anterior no es válida en general.  $\vec{u}_p(t)$  contendrá términos de la forma  $e^{\lambda_k t} t^m$ , con  $m \leq n_k$ , y puede hallarse evaluando (169) en una base conveniente o bien tomando el límite de (170). Por ejemplo, si  $n_k = 1$ ,  $\vec{u}_p(t)$  será de la forma

$$\vec{u}_p(t) = (\vec{c} + \alpha \vec{v}_k t) e^{\lambda_k t}$$

donde  $A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$ . Reemplazando en (169) obtenemos

$$(\lambda_k I - A)\vec{c} + \alpha \vec{v}_k = \vec{f}_0$$

de donde puede obtenerse  $\vec{c}$  eligiendo  $\alpha$  t.q.  $\vec{f}_0 - \alpha \vec{v}_k$  sea ortogonal a  $\vec{v}_k$ .

5)

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2a \frac{du}{dt} + bu = f_0 e^{\lambda t} H(t) \quad (171)$$

La solución para  $t > 0$  y  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ , es

$$u(t) = f_0 \int_0^t g(t-t') e^{\lambda t'} dt' = u_p(t) + u_h(t) \quad (172)$$

Si  $\lambda$  no es raíz de la ec. característica, es decir,  $\lambda \neq \lambda_{\pm}$ , con  $\lambda_{\pm} = -a \pm r$ , y  $r = \sqrt{a^2 - b}$ , obtenemos, para  $r \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \frac{f_0 e^{\lambda t}}{(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)} = \frac{f_0 e^{\lambda t}}{\lambda^2 + 2a\lambda + b} \\ u_h(t) &= \frac{-f_0 e^{-at} [\cosh[rt] + (\lambda + a) \sinh[rt]] / r}{(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)} \end{aligned} \quad (173)$$

Nuevamente  $u_p(t)$  es una solución particular que puede obtenerse reemplazando  $u_p(t) = ce^{\lambda t}$  en (228) y  $u_h(t)$  una solución de la ec. homogénea ajustada t.q.  $u(0) = 0$ .

Si  $\lambda \rightarrow \lambda_{\pm} = -a \pm r$  ("resonancia")  $\Rightarrow$

$$u_p(t) = \pm \frac{f_0 e^{\lambda_{\pm} t}}{2r}, \quad u_h(t) = \mp \frac{f_0 e^{-at} \sinh[rt]}{2r^2} \quad (174)$$

que pueden obtenerse como límite del resultado anterior o por integración de (172). Si  $a = 0$  y  $r = i\omega$ , con  $\omega$  real, tenemos el caso propiamente resonante, en el que la amplitud de la oscilación resultante es proporcional a  $t$ .

Si  $r \rightarrow 0$  (raíz doble) y  $\lambda \neq -a$ ,

$$u_p(t) = \frac{f_0 e^{\lambda t}}{(\lambda + a)^2}, \quad u_h(t) = \frac{-f_0 e^{-at} [1 + (a + \lambda)t]}{(\lambda + a)^2}$$

Finalmente, si  $r \rightarrow 0$  y  $\lambda \rightarrow -a$ ,

$$u_p(t) = \frac{1}{2} f_0 e^{-at} t^2, \quad u_h(t) = 0$$

Mencionemos finalmente que para una fuerza  $f(t) = f_0 t^n$ , con  $\lambda_{\pm} \neq 0$ ,  $u_p(t)$  será un polinomio de grado  $n$  mientras que si una raíz es nula (por ej.  $\lambda_- = 0$ ),  $u_p(t)$  será un polinomio de grado  $n + 1$ .

## I.3. Problemas con condiciones de contorno: el problema de Sturm-Liouville

### I.3.1. Generalidades

Hasta ahora hemos visto ecuaciones diferenciales con condiciones *iniciales*. Para una ecuación lineal ordinaria de segundo orden, las que las constantes de integración se determinaban a partir de los valores de la función incógnita y su derivada primera en un instante inicial  $t = t_0$ . Comenzaremos a estudiar en esta clase problemas de segundo orden en los cuales las constantes de integración quedan determinadas, no por condiciones iniciales, sino por *condiciones de contorno*. En tales problemas, el rango de variación de la variable (que representará usualmente una posición) está restringido a un cierto intervalo y las constantes de integración se determinan a partir de los valores de la función incógnita y/o su derivada en los puntos extremos del intervalo.

Tomemos una ecuación lineal de segundo orden general

$$\frac{d^2u}{dx^2} + A(x)\frac{du}{dx} + B(x)u = F(x) \quad (175)$$

donde  $A(x)$ ,  $B(x)$  y  $F(x)$  son continuas. Tal ecuación es equivalente a

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u = f(x) \quad (176)$$

donde  $f(x) = -p(x)F(x)$ ,  $q(x) = -p(x)B(x)$  y

$$p(x) = e^{\int A(x)dx}$$

es una función *positiva*.

En efecto, como  $p'(x) = A(x)p(x)$ , se tiene  $(pu')' = pu'' + p'u' = p(u'' + a_1u')$ , reduciéndose (176) a la ec. (175) multiplicada por  $-p(x)$ .

La ec. (176) se denomina ec. de *Sturm-Liouville* inhomogénea (la correspondiente ecuación homogénea se obtiene para  $f(x) \equiv 0$ ) y se escribe usualmente como

$$L[u(x)] = f(x) \quad (177)$$

donde

$$L = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

es el operador lineal de Sturm-Liouville. Tal operador actúa sobre funciones  $u(x)$  definidas en un dado intervalo real,  $a \leq x \leq b$ , y sólo queda completamente definido cuando se especifican los valores de la función incógnita, su derivada primera, o combinaciones lineales de ellas en los extremos  $(a, b)$  del intervalo. Tales condiciones se conocen como condiciones de contorno, y las funciones que las satisfacen constituyen el *dominio del operador de Sturm-Liouville*.

Problemas de este tipo aparecen frecuentemente en ecuaciones con derivadas parciales al aplicar el método de separación de variables, como veremos en las próximas clases.

Cabe insistir aquí en que estudiaremos primero el caso en que  $p(x)$  es *no nulo* en  $[a, b]$ . Más adelante, analizaremos el caso en que  $p(x)$  se anula en uno o ambos extremos, que conduce al estudio de las llamadas funciones especiales.

### I.3.2. Tipos de condiciones de contorno

*Ejemplo 1:* Consideraremos primero la ec. (177) en un intervalo finito  $[a, b]$ , con las condiciones de contorno conocidas como condiciones de *Dirichlet* homogéneas,

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (178)$$

El primer punto importante a analizar es la existencia o no de soluciones no triviales  $u(x) \neq 0$  de la ecuación *homogénea*  $L[u] = 0$ , que satisfaga las condiciones (220). Como veremos, la no existencia de tales soluciones (también llamadas modos cero) es condición necesaria y suficiente para que la ecuación inhomogénea tenga solución única, vía función de Green.

Por ejemplo, si

$$L = -\frac{d^2}{dx^2}$$

( $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ ), la solución general de la ec. homogénea  $L[u] = 0$  es  $u(x) = cx + d$ . Si  $u(a) = u(b) = 0 \Rightarrow c = d = 0$ . La ecuación homogénea sólo admite, pues, la solución trivial.

*Ejemplo 2:* Como segundo ejemplo, si

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} - k^2$$

la ec.  $L[u] = 0$  posee la solución

$$u(x) = ce^{ikx} + de^{-ikx}, \text{ que}$$

podemos escribir como

$$u(x) = c' \sin(k(x-a)) + d' \cos(k(x-a))$$

Si  $u(a) = 0 \Rightarrow d' = 0$ , y

la condición  $u(b) = 0$  implica

$$c' \sin[k(b-a)] = 0$$

que posee una solución no trivial ( $c' \neq 0$ ) si y sólo si

$$k(b-a) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

En caso contrario  $c' = 0$  y la única solución es  $u(x) \equiv 0$ .

Las condiciones de contorno (3) no son más que un caso muy particular. En general, las condiciones de contorno que definen el dominio de un operador de Sturm-Liouville pueden ser de dos tipos: *locales o separadas* o *no locales*. Se llama condiciones locales a aquéllas que establecen una relación entre la función incógnita y su derivada en cada borde por separado. Entre éstas, las usualmente consideradas son las llamadas condiciones de contorno de Cauchy, o de Robin homogéneas:

$$c_a u(a) + d_a u'(a) = 0, \quad c_b u(b) + d_b u'(b) = 0 \quad (179)$$

Si  $d_a = d_b = 0$ , estas se reducen a las de *Dirichlet* homogéneas mientras que, si  $c_a = c_b = 0$ , se obtienen las condiciones de *Neumann* homogéneas,  $u'(a) = u'(b) = 0$ . Por supuesto, puede tenerse también  $d_a = c_b = 0$ , en cuyo caso se obtienen las condiciones mixtas  $u(a) = 0, u'(b) = 0$  (Dirichlet en un extremo y Neumann en el otro). En general, la condición impuesta en un extremo es independiente de la impuesta en el otro.

Notemos que el conjunto de funciones que satisfacen condiciones de contorno del tipo (179) forman un espacio vectorial (si  $u_1$  y  $u_2$  las satisfacen  $\Rightarrow c_1 u_1 + c_2 u_2$  también las satisface). No ocurre lo mismo para condiciones de contorno no homogéneas (combinación lineal de  $u$  y su derivada igualada a una constante distinta de cero).

Las condiciones de contorno *no locales*, en cambio, establecen una relación entre el valor que toman la función incógnita y su derivada en uno y otro borde. Típicos ejemplos de condiciones de contorno no locales son las condiciones *periódicas*

$$u(a) = u(b), \quad p(a)u'(a) = p(b)u'(b) \quad (180)$$

y *antiperiódicas*

$$u(a) = -u(b), \quad p(a)u'(a) = -p(b)u'(b). \quad (181)$$

### I.3.3. Carácter autoadjunto del operador

Una propiedad fundamental del operador  $L$  con las condiciones de contorno (179), (220) o (181) es que resulta *autoadjunto*:

**Teorema I.3.1** *Si  $u$  y  $v$  son dos funciones reales que satisfacen alguna de las condiciones de contorno (179), (220) o (181), entonces se cumple*

$$(v, L[u]) = (L[v], u) \quad (182)$$

donde  $(v, u)$  denota el producto interno usual

$$(v, u) = \int_a^b v(x)u(x)dx$$

(hemos supuesto  $u, v$  reales).

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

*Demostración:* En efecto, integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}
 (v, L[u]) - (L[v], u) &= \int_a^b [v(pu')' - u(pv')'] dx \\
 &= \int_a^b [(vpu')' - (upv')'] dx \\
 &= p[vu' - uv'] \Big|_a^b = pW(v, u) \Big|_a^b = 0
 \end{aligned} \tag{183}$$

para las condiciones (179), (220) o (181). En efecto, es fácil verificar que el Wronskiano  $W(u, v)$  se anula independientemente en cada extremo para funciones que satisfacen condiciones de contorno de Cauchy, y que la contribución de un extremo se cancela con la del otro extremo para funciones que satisfacen condiciones de contorno periódicas o antiperiódicas.

□

Notemos que la noción de operador autoadjunto sobre un espacio de funciones es extensión natural de la definición de matriz autoadjunta. En efecto, en el caso de vectores  $\vec{u}$  de  $R^n$  y operadores lineales representados por matrices  $A$  reales de  $n \times n$ , con el producto interno usual  $(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^n v_i u_i$ ,  $A$  se define autoadjunto si  $(\vec{v}, A\vec{u}) = (A\vec{v}, \vec{u}) \forall \vec{u}, \vec{v} \in R^n$ , o sea, si  $\sum_{i,j} v_i A_{ij} u_j = \sum_{i,j} u_i A_{ij} v_j$ . Esto implica  $A_{ij} = A_{ji} \forall i, j$ , es decir,  $A^{\text{tr}} = A$ . Los operadores lineales reales autoadjuntos en  $R^n$  son, pues, representados por matrices  $A$  simétricas.

Como veremos a continuación, el carácter autoadjunto del operador tiene consecuencias muy importantes: La función de Green asociada, si existe, resulta simétrica y se satisface, por lo tanto, el principio de reciprocidad (ver sección I.3.4). Por otra parte, el operador tiene un conjunto completo de autofunciones, que son una base del espacio vectorial de funciones en el dominio (ver sección I.3.6).

#### I.3.4. Función de Green para condiciones de Cauchy. Solución del problema inhomogéneo

Consideremos ahora la ec. inhomogénea (177). Como en los problemas de condiciones iniciales, la herramienta general de resolución será la función de Green  $G(x, x')$  del operador  $L$  con la condición de contorno (179).

Se define dicha función de Green como la solución de la ecuación (el subíndice en el operador indica que el mismo actúa sobre el primer argumento de la función de Green)

$$L_x[G(x, x')] = \delta(x - x') \tag{184}$$

I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA  
DE STURM-LIOUVILLE

---

(donde  $a < x, x' < b$ ) que satisface, en su primera variable, las condiciones de contorno (179), es decir

$$\begin{aligned} c_a G(a, x') + d_a \frac{dG}{dx}(x = a, x') &= 0, \\ c_b G(b, x') + d_b \frac{dG}{dx}(x = b, x') &= 0. \end{aligned} \quad (185)$$

Probaremos a continuación que:

**Teorema I.3.2** *i) dicha solución existe y es única si y sólo si la única solución de la ecuación homogénea  $L[u(x)] = 0$  con la condición de contorno (179) es la solución trivial  $u(x) = 0 \forall x \in [a, b]$  (no existen modos cero) y*

*ii) en tal caso existe una única solución de la ecuación inhomogénea (177) con la condición de contorno (179), dada por la convolución:*

$$u(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx' \quad (186)$$

*Demostración:*

*Probaremos primero ii). Resulta claro que, si  $G(x, x')$  existe, (186) es solución de (177) pues*

$$L[u(x)] = \int_a^b L_x[G(x, x')] f(x') dx' = \int_a^b \delta(x - x') f(x') dx' = f(x),$$

*donde hemos usado, primero, que  $L$  actúa sobre la primera variable, no afectada por la integral; luego, hemos usado la ecuación diferencial que define a la función de Green y, finalmente, la definición de la distribución delta de Dirac.*

*Además,  $u$  cumple la condición de contorno (3) pues  $G$  la cumple en su primera variable, no afectada por la convolución. En efecto*

$$c_a u(a) + d_a u'(a) = \int_a^b c_a G(a, x') + d_a \frac{dG}{dx}(x = a, x') f(x') dx' = 0$$

$$c_b u(b) + d_b u'(b) = \int_a^b c_b G(b, x') + d_b \frac{dG}{dx}(x = b, x') f(x') dx' = 0$$

*Hemos mostrado, entonces, que (186) es solución.*

*La unicidad de esta solución surge, por el absurdo, una vez probado i). En efecto, si existen  $v_1$  y  $v_2$  t.q.  $L[v_i(x)] = f(x)$ ,  $i = 1, 2$ , satisfaciendo ambas (179), por la linealidad de  $L$  se tiene  $L[v_1(x) - v_2(x)] = L[v_1(x)] - L[v_2(x)] = 0$ , lo que implica, por i), que  $v_1 - v_2 \equiv 0$  o, equivalentemente,  $v_1 \equiv v_2$ .*

*La prueba de i) se verá directamente por construcción de la función de Green.*

*Sean  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$  dos soluciones de la ecuación homogénea  $L[u(x)] = 0$ , cada una de las cuales satisface la condición de contorno en uno de los extremos:*

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

$$c_a u_1(a) + d_a u_1'(a) = 0, \quad c_b u_2(b) + d_b u_2'(b) = 0 \quad (187)$$

Por el principio de superposición para  $L[u(x)] = 0$ , siempre existen soluciones únicas  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  no idénticamente nulas que satisfacen estas condiciones. Por ejemplo, si  $v_1(x)$  y  $v_2(x)$  son dos soluciones cualesquiera linealmente independientes de  $L[v] = 0$  y no nulas,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= v_1(x)[c_a v_2(a) + d_a v_2'(a)] - v_2(x)[c_a v_1(a) + d_a v_1'(a)], \\ u_2(x) &= v_1(x)[c_b v_2(b) + d_b v_2'(b)] - v_2(x)[c_b v_1(b) + d_b v_1'(b)] \end{aligned}$$

satisfacen (187).

Por otro lado, para  $p$  y  $q$  continuos y  $p > 0$ , no pueden existir dos soluciones linealmente independientes que satisfagan ambas la condición de contorno en uno cualquiera de los extremos del intervalo (pues, en tal caso el determinante de la matriz fundamental, es decir el wronskiano de estas soluciones, sería nulo en ese extremo).

Para  $x < x'$ ,  $L[G(x, x')] = 0$  y podemos entonces escribir  $G(x, x') = c_1(x')u_1(x)$ , que satisface la condición de contorno en  $x = a$ . Análogamente, si  $x > x'$ ,  $G(x, x') = c_2(x')u_2(x)$ , que satisface la condición en  $x = b$ . Por lo tanto,

$$G(x, x') = \begin{cases} c_1(x')u_1(x) & x < x' \\ c_2(x')u_2(x) & x > x' \end{cases} \quad (188)$$

Integrando (184) entre  $x' - \varepsilon$  y  $x' + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$ , obtenemos

$$- [p(x)G'(x, x')] \Big|_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} q(x')G(x, x')dx' = 1$$

donde  $G'(x, x') = \frac{d}{dx}G(x, x')$ .

Debido a la continuidad de  $p$  y  $q$ , esta ecuación puede satisfacerse sólo si  $G(x, x')$  es continua y su derivada tiene una discontinuidad de magnitud  $-1/p(x')$  en  $x = x'$  (es decir,  $-p(x)G'(x, x')$  debe ser de la forma  $H(x - x') + \phi(x)$ , con  $\phi$  continua en  $x = x'$ , para que  $(-pG')'$  contenga un término  $\delta(x - x')$ ).

Esto implica

$$\begin{aligned} c_1(x')u_1(x') - c_2(x')u_2(x') &= 0, \\ c_1(x')u_1'(x') - c_2(x')u_2'(x') &= \frac{1}{p(x')} \end{aligned}$$

con  $u'(x) = \frac{du}{dx}$ , lo que determina  $c_1$  y  $c_2$ :

$$c_1(x') = -u_2(x')/C, \quad c_2(x') = -u_1(x')/C$$

donde



I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

$$\begin{aligned} C &= p(x')[u_1(x')u_2'(x') - u_2(x')u_1'(x')] \\ &= [pW(u_1, u_2)]_{x=x'}, \quad W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

La solución existe sólo si  $C \neq 0$ , o sea, sólo si el Wronskiano  $W(u_1, u_2)$  es no nulo. Esto se cumple si  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$  son dos soluciones linealmente independientes de  $L[u] = 0$ .

En tal caso  $C$  es una constante, independiente de  $x'$ :

$$\begin{aligned} [p(u_1u_2' - u_2u_1')] &= p'(u_1u_2' - u_2u_1') + p(u_1u_2'' - u_2u_1'') \\ &= u_1(pu_2')' - u_2(pu_1')' = q(u_1u_2 - u_2u_1) = 0 \end{aligned}$$

El resultado final para  $C \neq 0$  es pues

$$G(x, x') = \begin{cases} -u_1(x)u_2(x')/C & x \leq x' \\ -u_1(x')u_2(x)/C & x \geq x' \end{cases} \quad (189)$$

Si  $C = 0$ , la función de Green no existe. En este caso las soluciones  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$  son linealmente dependientes, es decir,  $u_2(x) = cu_1(x)$ , por lo que  $u_1(x)$  satisface la condición de contorno en ambos extremos. Esto implica que si  $C = 0$ , existe una solución no trivial  $u_1 \neq 0$  que satisface  $L[u_1] = 0$  y las condiciones de contorno (3). En otras palabras, la función de Green existe si y sólo si la única solución de la ecuación homogénea  $L[u] = 0$  que satisface las condiciones (179) es  $u = 0$ . Esto concluye la prueba de i) y, al mismo tiempo, (189) da una expresión explícita para la función de Green.

□

Notar: El resultado es completamente análogo al que se obtiene al resolver sistemas de ecuaciones lineales algebraicas  $Ax = b$ , con  $A$  una matriz de  $n \times n$ , y  $x, b$  vectores columna de  $n \times 1$ . Si la única solución al sistema homogéneo  $Ax = 0$  es  $x = 0$ , entonces existe la inversa  $A^{-1}$ , definida por  $AA^{-1} = I$ , con  $I$  la identidad (es decir,  $(AA^{-1})_{i,j} = \delta_{ij}$ ) y, en tal caso, la solución de  $Ax = b$  es única y está dada por  $x = A^{-1}b$  (o sea,  $x_i = \sum_j A_{ij}b_j$ ). En cambio, si existe  $x \neq 0$  t.q.  $Ax = 0$ , la inversa  $A^{-1}$  no existe.

El operador lineal definido por

$$G[u(x)] = \int_a^b G(x, x')u(x')dx' \quad (190)$$

es, pues, el inverso del operador  $L$  y se lo denota a veces también como  $L^{-1}$ .

Notemos que i) el inverso del operador lineal diferencial  $L$  es un operador lineal integral ( $G(x, x')$  se conoce como el núcleo del operador integral) y que ii)  $G$  depende no sólo de los coeficientes  $p(x), q(x)$  de  $L$  sino también de la condición de contorno.

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

Notemos también, volviendo a la ecuación (189), la simetría

$$G(x, x') = G(x', x), \quad (191)$$

que permite enunciar el

Principio de reciprocidad: La respuesta del sistema en  $x$  frente a una fuente puntual en  $x'$  es idéntica a la respuesta del sistema en  $x'$  frente a una fuente puntual en  $x$ , aún si  $p$  y  $q$  dependen de  $x$ . Esto se debe al carácter autoadjunto de  $L$ . En efecto, debido al carácter autoadjunto de  $L$ :

$$(L_x G(x, x'), G(x, x'')) = (G(x, x'), L_x G(x, x'')).$$

Usando la ecuación diferencial que satisface la función de Green, y la definición de la delta de Dirac:

$$\int_a^b dx \delta(x - x') G(x, x'') = \int_a^b dx G(x, x') \delta(x - x''),$$

que conduce a

$$G(x', x'') = G(x'', x')$$

A partir de (191), es fácil ver que el operador inverso  $G$ , definido en (190) es también autoadjunto:  $(v, G[u]) = \int_a^b \int_a^b v(x) G(x, x') u(x') dx dx' = (G[v], u)$ .

Obsérvese que la función de Green (189) no es invariante frente a traslaciones espaciales (debido a las condiciones de contorno). La invarianza traslacional está rota, aun si  $p$  y  $q$  son constantes, por lo que  $G(x, x') \neq G(x - x')$ .

La solución (186) puede entonces escribirse como

$$u(x) = \frac{-1}{C} [u_2(x) \int_a^x u_1(x') f(x') dx' + u_1(x) \int_x^b u_2(x') f(x') dx']$$

y puede verificarse explícitamente que  $L[u] = f$ . Siempre es posible escribirla en la forma  $u(x) = u_p(x) + u_h(x)$ , donde  $u_p$  es una solución particular de la ec. inhomogénea ( $L[u_p] = f$ ) y  $u_h$  una solución de la ecuación homogénea ( $L[u_h] = 0$ ) ajustada para satisfacer la condición de contorno.

*Ejemplo 1:*  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  ( $p(x) = 1, q(x) = 0$ ). En este caso, tomando  $a = 0, b > 0$  y  $u(0) = u(b) = 0$ ,

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = x - b$$

y  $C = x - (x - b) = b$ . Obtenemos

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{x(b-x')}{b} & x \leq x' \\ \frac{x'(b-x)}{b} & x \geq x' \end{cases} \quad (192)$$

I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

La solución de la ecuación

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$

para  $0 \leq x \leq b$  con  $u(a) = u(b) = 0$  es, entonces

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^b G(x, x') f(x') dx \\ &= \frac{1}{b} \left[ \int_0^x x'(b-x) f(x') dx' + \int_x^b x(b-x') f(x') dx' \right] \end{aligned}$$

Si  $f(x) = x^2$  se obtiene

$$u(x) = \frac{1}{12} x(b^3 - x^3) = -\frac{x^4}{12} + x \frac{b^3}{12}$$

que se compone de la solución particular  $-x^4/12$  más la solución de la ec. homogénea  $xb^3/12$ , tal que  $u(0) = u(b) = 0$ .

*Ejemplo 2:*  $L = -\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2$ ,  $a = 0$ ,  $b > 0$ . En este caso, para  $u(a) = u(b) = 0$ ,

$$u_1(x) = \sin(\omega x), \quad u_2(x) = \sin(\omega(x-b))$$

y  $C = \omega[\sin(\omega x) \cos(\omega(x-b)) - \cos(\omega x) \sin(\omega(x-b))] = \omega \sin(\omega b)$ .

La función de Green existe sólo si  $\sin(\omega b) \neq 0$ , es decir, si  $\omega \neq n\pi/b$ , con  $n \in Z$  (ver ejemplo en la sección I.3.1). Cuando existe, se tiene

$$G(x, x') = \frac{1}{\omega \sin(\omega b)} \begin{cases} \sin(\omega x) \sin(\omega(b-x')) & x \leq x' \\ \sin(\omega x') \sin(\omega(b-x)) & x \geq x' \end{cases}$$

Para  $\omega \rightarrow 0$  se recupera el resultado (192).

Si  $\omega = ik$ , con  $k$  real, la función de Green existe  $\forall k \neq 0$  y se obtiene reemplazando  $\omega \rightarrow k$ ,  $\sin \rightarrow \sinh$  en el resultado anterior.

*Ejemplo 3:*

Consideremos nuevamente  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ . Si la condición de contorno es  $u'(a) = u'(b) = 0$ , la función de Green no existe: Tenemos

$$u_1(x) = c_1, \quad u_2(x) = c_2$$

y, por lo tanto,  $C = 0$ . Esto se debe a que la solución constante  $u(x) = c \neq 0$  es solución no nula de  $L[u] = 0$  y satisface  $u'(a) = u'(b) = 0$ . Obsérvese que, en este caso, la solución del problema inhomogénea, si existe, no es única. En efecto, dada una solución, siempre se le puede sumar una constante arbitraria, que satisface la ecuación homogénea y la condición de contorno.

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

*Ejemplo 4:* Consideremos ahora  $L = -\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2$ , con la condición  $u'(a) = u'(b) = 0$ . Tenemos

$$u_1(x) = \cos(\omega x), \quad u_2(x) = \cos(\omega(x - b))$$

con  $C = -\omega \sin(\omega b)$ .

La función de Green existe nuevamente sólo si  $\sin(\omega b) \neq 0$ , es decir, si  $\omega \neq n\pi/b$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . En tal caso,

$$G(x, x') = \frac{1}{\omega \sin(\omega b)} \begin{cases} \cos(\omega x) \cos(\omega(b-x')) & x \leq x' \\ \cos(\omega x') \cos(\omega(b-x)) & x \geq x' \end{cases}$$

Si  $\omega \rightarrow 0$ ,  $|G(x, x')| \rightarrow \infty$ .

Por otro lado, si  $\omega = ik$ , con  $k$  real,  $G(x, x')$  existe  $\forall k \neq 0$ .

#### I.3.5. Resolución de ecuaciones lineales homogéneas por series de potencias

El formalismo basado en la función de Green, visto en la sección anterior, permite resolver la ecuación inhomogénea  $L[u] = f$  conociendo la solución general de la ecuación homogénea  $L[u] = 0$ . No hemos dicho, sin embargo, cómo resolver en general esta última ecuación, cuando las funciones  $p(x)$ ,  $q(x)$  (o equivalentemente,  $A(x)$ ,  $B(x)$ ) no son constantes. Esto es lo que discutiremos a continuación.

Consideremos la ecuación general lineal de segundo orden

$$u'' + A(x)u' + B(x)u = 0 \tag{193}$$

**Teorema I.3.3** Si  $A(x)$  y  $B(x)$  son analíticas en un entorno de  $x = 0$ , es decir,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n, \quad |x| < R, \tag{194}$$

las soluciones de (193) son analíticas en ese entorno y pueden, pues, representarse como una serie de potencias:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < R \tag{195}$$

*Demostración:* Supondremos primero que existe una solución del tipo (195), y probaremos que converge.

Dado que  $B(x)u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^n B_{n-m} c_m$ ,  $A(x)u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n+1} A_{n-m+1} m c_m$ , reemplazando (195) en (193) se obtiene, luego de definir  $B_{-1} = 0$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n [c_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{m=0}^{n+1} c_m (mA_{n-m+1} + B_{n-m})] = 0$$

I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA  
DE STURM-LIOUVILLE

---

Por lo tanto, como el coeficiente de  $x^n$  debe ser nulo,

$$a_{n+2} = -\frac{\sum_{m=0}^{n+1} c_m [mA_{n-m+1} + B_{n-m}]}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 0 \quad (196)$$

donde el segundo miembro depende de los coeficientes previos  $c_0, \dots, c_{n+1}$ . Se obtiene así una relación recursiva que determina todos los coeficientes  $c_n$  para  $n \geq 2$  a partir de los dos primeros  $c_0, c_1$ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{A_0 c_1 + B_0 c_0}{2} \\ c_3 &= -\frac{A_1 c_1 + 2A_0 c_2 + B_1 c_0 + B_0 c_1}{6} \\ &= -\frac{c_0(B_1 - A_0 B_0) + c_1(A_1 + B_0 - A_0^2)}{6} \end{aligned} \quad (197)$$

Demostremos ahora que esta serie converge para  $|x| < R$ . Sea  $t$  t.q.  $0 \leq |x| < t < R$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n t^n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n t^n = 0$  (condición necesaria de convergencia de las series (194))  $\exists M > 0$  t.q.

$$|B_n| \leq M/t^n, \quad |A_n| \leq M/t^{n-1},$$

$\forall n$ .

Por lo tanto,

$$|c_{n+2}| \leq \frac{M \sum_{m=0}^{n+1} |c_m| t^m (m+1)}{t^n (n+2)(n+1)}$$

Definiendo recursivamente los coeficientes no negativos

$$d_{n+2} = \frac{M \sum_{m=0}^{n+1} d_m t^m (m+1)}{t^n (n+2)(n+1)}$$

con  $d_0 = |c_0|$ ,  $d_1 = |c_1|$ , tenemos  $|c_n| \leq d_n \forall n$ . Además,

$$d_{n+2} = d_{n+1} \left[ \frac{n}{t(n+2)} + \frac{Mt(n+2)}{(n+2)(n+1)} \right]$$

por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+2} |x|^{n+2}}{d_{n+1} |x|^{n+1}} = \frac{|x|}{t} < 1$$

lo que implica, por el criterio del cociente, que  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x_n$  converge absolutamente si  $|x| < t$ , es decir,  $\forall |x| < R$ . Esto implica a su vez que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$  converge absolutamente para  $|x| < R$ .

La solución general puede pues escribirse como

$$u(x) = c_0 u_1(x) + c_1 u_2(x)$$

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

con  $u_1$  la solución para  $c_0 = 1, c_1 = 0$  y  $u_2$  aquella para  $c_0 = 0, c_1 = 1$ :

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 - \frac{B_0}{2}x^2 - \frac{B_1 - A_0B_0}{6}x^3 + \dots, \\ u_2(x) &= x - \frac{A_0}{2}x^2 - \frac{A_1 + B_0 - A_0^2}{6}x^3 + \dots \end{aligned}$$

□

Obviamente, las mismas consideraciones rigen si los coeficientes son analíticos en un entorno de un punto  $x_0$ , en cuyo caso,  $A(x), B(x), u(x)$  pueden expresarse como series de potencias en  $(x - x_0)$  en ese entorno.

*Ejemplo:*

$$u'' - k^2u = 0$$

La solución general es  $u(x) = \alpha e^{kx} + \beta e^{-kx} = a_0 \cosh(kx) + a_1 \sinh(kx)$ , con  $a_{0,1} = \alpha \pm \beta$ . Podemos obtenerla con el método anterior (para  $A(x) = 0, B(x) = -k^2$ ), planteado la serie (195). Se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n [c_{n+2}(n+2)(n+1) - k^2c_n] = 0$$

de donde

$$c_{n+2} = \frac{k^2c_n}{(n+2)(n+1)} = c_n \frac{k^{n+2}n!}{k^n(n+2)!}, n \geq 0 \quad (198)$$

Para  $c_0 = 1, c_1 = 0$ , la relación recursiva se satisface si

$$c_n = \frac{k^n}{n!}, \quad n \text{ par}, \quad c_n = 0, \quad n \text{ impar}$$

que conduce a  $u_1(x) = \cosh(kx)$ , y si  $c_1 = 1, c_0 = 0$ ,

$$c_n = \frac{k^n}{n!}, \quad n \text{ impar}, \quad c_n = 0, \quad n \text{ par}$$

que conduce a  $u_2(x) = \sinh(kx)$ . El presente teorema implica la convergencia de estas series  $\forall x \in \mathfrak{R}$ . Veremos ahora otro ejemplo de aplicación.

**Ejemplo: Ecuación de Legendre**

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + \lambda(\lambda + 1)u = 0 \quad (199)$$

Puede escribirse también en la forma de Sturm-Liouville,

$$[(1 - x^2)u']' + \lambda(\lambda + 1)u = 0$$

I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA  
DE STURM-LIOUVILLE

---

y corresponde a  $A(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ ,  $B(x) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2}$ , siendo ambos analíticos para  $|x| < 1$ . Surge al considerar la ec.  $\Delta_\Omega u = -\lambda(\lambda+1)u$ , donde  $\Delta_\Omega$  es la parte angular del Laplaciano en coord. esféricas y  $u$  una función dependiente sólo de  $\theta$ :

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\lambda(\lambda+1)u$$

la cual se reduce a (199) si  $x = \cos \theta$  ( $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial x}$ ). Como  $\lambda(\lambda+1) = (\lambda+1/2)^2 - 1/4$ , es suficiente considerar  $\text{Re}[\lambda] \geq -1/2$ . Planteando la serie (195) se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \{c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n[n(n-1) + 2n - \lambda(\lambda+1)]\} = 0$$

de donde

$$c_{n+2} = c_n \frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)} = -c_n \frac{(n+\lambda+1)(\lambda-n)}{(n+2)(n+1)}$$

Para  $c_1 = 0$  y  $c_0 \neq 0$ , se obtiene la solución *par*, donde  $c_{2n+1} = 0$  y

$$c_2 = -c_0 \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}, \quad c_4 = c_0 \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3)}{4!}, \dots$$

mientras que para  $c_0 = 0$  y  $c_1 \neq 0$ , se obtiene la solución *impar*, donde  $c_{2n} = 0$  y

$$c_3 = -c_0 \frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{3!}, \quad c_5 = c_0 \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+4)}{5!}, \dots$$

Dado que  $|c_{n+2}/c_n| \rightarrow 1$  para  $n \rightarrow \infty$ , el radio de convergencia de la serie resultante es 1. Puede verse que la solución no es en general acotada para  $x \in (-1, 1)$  ( $|u(x)| \rightarrow \infty$  en al menos uno de los bordes).

La excepción ocurre si  $\lambda = l$ , con  $l$  entero positivo, en cuyo caso  $c_{l+2} = 0$ . Esto implica que la solución con la *misma paridad* de  $l$  se convierte en un *polinomio de grado  $l$* , que se denomina *Polinomio de Legendre*. En tal caso, los coeficientes no nulos del polinomio están dados por

$$c_{2n+i} = c_i \frac{(-1)^n (l_2!)^2 (l+2n)!}{l! (l_2-n)! (l_2+n)! (2n+i)!}, \quad i = 0, 1, \quad n = 0, \dots, l_2$$

donde  $l_2 = [l/2]$  ( $[ ]$  denota parte entera) y  $i = 0$  corresponde a la solución par para  $l$  par,  $i = 1$  a la solución impar para  $l$  impar. Los polinomios de Legendre se definen exactamente como la solución para los coeficientes iniciales  $c_i = (-1)^{l_2} l! / [(l_2!)^2 2^{l-i}]$ ,  $i = 0, 1$ , y pueden por lo tanto escribirse como (llamando  $k = l_2 - n$ )

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{l_2} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}$$

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

Dado que  $\frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!}x^{l-2k} = \frac{d^l}{dx^l}x^{2l-2k}$ , y  $k!(l-k)! = l!/ \binom{l}{k}$ , pueden también reescribirse como

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} x^{2l-2k} \\ &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \end{aligned} \quad (200)$$

(Fórmula de Rodrigues). Algunos ejemplos son

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_1(x) &= x & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned} \quad (201)$$

Los Polinomios de Legendre satisfacen las relaciones

$$P_l(1) = 1, \quad \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1}$$

$$l P_l(x) = (2l-1)x P_{l-1}(x) - (l-1)P_{l-2}(x), \quad l \geq 2$$

Cabe destacar entonces que soluciones *acotadas* de la ec. (199) para  $x \in (-1, 1)$  y  $\lambda \geq -1/2$  se obtienen únicamente cuando  $\lambda = l$ , entero, y en tal caso para la solución con la misma paridad de  $l$ , la cual es un polinomio proporcional al Polinomio de Legendre (200). Por ejemplo, puede verificar el lector que para  $\lambda = 0$ , las soluciones l.i. de (199) son  $u_1(x) = P_0(x) = 1$  y  $u_2(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ , siendo  $u_2(x)$  la solución impar, la cual diverge para  $x \rightarrow \pm 1$ .

Tanto los polinomios de Legendre como las soluciones l.i.  $u_{1,2}(x)$  de la ec. (199) para  $\lambda$  general (denominadas funciones de Legendre de primera y segunda especie) están directamente incorporados en la mayoría de los programas de cómputo analítico.

**Ejemplo: Ecuación asociada de Legendre:**

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + [\lambda(\lambda+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]u = 0 \quad (202)$$

Se reduce a la ec. de Legendre para  $m = 0$ , y surge al considerar la ec.  $\Delta_\Omega u = -\lambda(\lambda+1)u$  para  $u(\theta, \phi) = u(\theta)e^{im\phi}$ :

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} u = -\lambda(\lambda+1)u$$

que se reduce a (202) tras el reemplazo  $x = \cos \theta$ . Podemos asumir obviamente  $\text{Re}[m] \geq 0$ ,  $\text{Re}[\lambda] \geq -1/2$ . Es conveniente realizar el cambio de variable  $u = (1-x^2)^{m/2}w$ . Se obtiene entonces la ec.

$$(1-x^2)w'' - 2(m+1)xw' + [\lambda(\lambda+1) - m(m+1)]w = 0 \quad (203)$$



Planteando una serie de potencias para  $w$ , se obtiene

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= c_n \frac{n(n-1) + (2n+m)(m+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)} \\ &= -c_n \frac{(n+\lambda+1+m)(\lambda-m-n)}{(n+2)(n+1)} \end{aligned} \quad (204)$$

Si  $\lambda - m = k$ , con  $k$  entero positivo,  $c_{k+2} = 0$  y la solución con la misma paridad de  $k$  es un polinomio de grado  $k$ . Estas son las únicas soluciones acotadas de (203) en  $(-1, 1)$ . En el caso usual,  $m$  es entero, y soluciones acotadas de (203) existirán entonces sólo para  $\lambda = l \geq m$ , con  $l$  entero positivo. La solución con la misma paridad de  $l - m$  será entonces un polinomio de grado  $l - m$ .

Si bien podemos obtener dichos polinomios por medio de (204), es fácil ver que si  $u(x)$  es solución de la ec. de Legendre (199), entonces su derivada emésima  $u^{(m)}(x)$  satisface la ec. (203):

$$(1-x^2)u^{(m+2)} - 2(m+1)xu^{(m+1)} + [\lambda(\lambda+1) - m(m+1)]u^{(m)} = 0$$

Por lo tanto, para  $m$  entero positivo, las soluciones de (202) son de la forma  $(1-x^2)^{m/2}u^{(m)}(x)$ , con  $u(x)$  solución de (199). Para  $\lambda$  y  $m$  entero, con  $\lambda = l \geq m$ , obtenemos así las denominadas *funciones asociadas de Legendre*, definidas por

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad 0 \leq m \leq l$$

que son polinomios sólo para  $m$  entero (en tal caso de grado  $l$ ) y que constituyen las únicas soluciones acotadas de (202) en  $(-1, 1)$ . Se define también

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

verificándose

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx &= \delta_{ll} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \\ \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^{-m}(x) dx &= \delta_{ll} (-1)^m \frac{2}{2l+1} \end{aligned}$$

**Teorema I.3.4** (*Teorema de Frobenius-Fuchs*): Si  $A(x)$  posee, a lo sumo, un polo simple en  $x = 0$  y  $B(x)$ , a lo sumo, un polo de orden 2 en  $x = 0$ , de modo que para  $0 < |x| < R$  se cumple

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n x^n = \frac{A_{-1}}{x} + A_0 + \dots, \\ B(x) &= \sum_{n=-2}^{\infty} B_n x^n = \frac{B_{-2}}{x^2} + \frac{B_{-1}}{x} + \dots \end{aligned}$$

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

entonces una de las soluciones l.i. de la ec. (193) tiene la forma, para  $0 < |x| < R$ , de una serie generalizada de potencias

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (205)$$

donde  $a_0 \neq 0$  y  $s$  es una de las raíces de la ecuación indicial

$$s(s-1) + A_{-1}s + B_{-2} = 0 \quad (206)$$

o sea,

$$s = \frac{1 - A_{-1} \pm r}{2}, \quad r = \sqrt{(1 - A_{-1})^2 - 4B_{-2}} \quad (207)$$

Si la diferencia  $r$  entre las dos raíces de esta ecuación no es entera, entonces la 2ª solución de (193) es también una serie generalizada de potencias, con  $s$  la otra raíz de (250). En cambio, si  $r$  es entero, la 2ª solución tiene la forma

$$u_2(x) = C u_1(x) \ln x + x^{s'} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (208)$$

donde  $C$  es una constante (que puede ser 0) y  $s'$  la otra raíz de (250), con  $\text{Re}[s'] \leq \text{Re}[s]$ . Si  $r = 0$  ( $s = s'$ )  $C \neq 0$ .

La necesidad de una serie generalizada de potencias puede comprenderse analizando el comportamiento de la solución para  $x \rightarrow 0$ . Conservando sólo los términos de mayor orden en este límite, la ecuación (193) se reduce a

$$u'' + \frac{A_{-1}}{x} u' + \frac{B_{-2}}{x^2} u = 0 \quad (209)$$

que es una ec. de Euler (vista en la clase 5) con soluciones  $u(x) = cx^s$  (y también  $x^s \ln x$  para raíces múltiples). Reemplazando esta solución en (209) obtenemos

$$cx^s [s(s-1) + A_{-1}s + B_{-2}] = 0$$

que conduce precisamente a la ecuación indicial (250). Si las dos raíces de (250) son distintas, las soluciones de (193) deben ser, pues, de la forma  $cx^s$  para  $x$  cercano al origen. Si las raíces son iguales, la segunda solución linealmente independiente de (209) es  $x^s \ln x$ , por lo que la segunda solución de (193) debe ser de esta forma para  $x \rightarrow 0$ .

La ecuación indicial surge, de todos modos, al reemplazar (249) en (193). Obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{s+n-2} [a_n(n+s)(n+s-1) + \sum_{m=0}^n a_m (A_{n-m-1}(m+s) + B_{n-m-2})] = 0$$

La anulación del coeficiente de  $x^{s-2}$  ( $n = 0$ ) implica

$$a_0 [s(s-1) + A_{-1}s + B_{-2}] = 0$$

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

que conduce a la ecuación indicial (250) al ser  $a_0 \neq 0$ . Luego, la anulación del coeficiente de  $x^{n+s-2}$  para  $n \geq 1$  conduce a la relación recursiva

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} a_m (A_{n-m-1}(m+s) + B_{n-m-2})}{(n+s)(n+s-1) + A_{-1}(n+s) + B_{-2}} \\ &= -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} a_m (A_{n-m-1}(m+s) + B_{n-m-2})}{n(n+2s+A_{-1}-1)}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

donde el 2º miembro depende de  $a_0, \dots, a_{n-1}$ . Como  $n+2s+A_{-1}-1 = n \pm r$  (ver (207)), esto es válido si  $n \pm r \neq 0$ , o sea,  $n-r \neq 0$ . Los problemas con una solución del tipo (249) pueden surgir, entonces, sólo cuando  $r$  es entero y, en tal caso, para la raíz menor  $s = \frac{1-A_{-1}-r}{2}$ , en cuyo caso la 2ª solución es de la forma (251).

□

*Ejemplo 1:* Consideraremos, en realidad, primero un contraejemplo:

$$u'' + u/x^4 = 0. \quad (210)$$

Esta ecuación no es de la forma contemplada en el teorema I.3.4, pues  $B(x)$  posee un polo de orden 4. Puede verificarse que la solución general de esta ecuación es

$$u(x) = x[c_1 \cos(1/x) + c_2 \sin(1/x)],$$

que no es de la forma (249) o (251).

Notemos, sin embargo, que la solución es de la forma (249) en  $z = 1/x$  ( $u(z) = (c_1 \cos z + c_2 \sin z)/z$ ). En esta variable, la ecuación (210) se convierte en  $u'' + 2u'/z + u = 0$ , que es de la forma contemplada en el teorema I.3.4, y la ecuación indicial es  $s(s-1) + 2s = 0$ , con raíces  $s = -1$  y  $s = 0$ , en acuerdo con el desarrollo en serie de  $u(z)$ .

**Ejemplo 2: Ecuación de Bessel**

$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0 \quad (211)$$

Es de la forma contemplada en el teorema 2 y surge en muchos problemas físicos con simetría cilíndrica o esférica al resolver la parte radial del Laplaciano, como veremos en próximas clases. Siguiendo el procedimiento anterior, obtenemos, definiendo  $a_{-2} = a_{-1} = 0$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{s+n-2} [a_n [(n+s)(n+s-1) + (n+s) - \nu^2] + a_{n-2}] = 0$$

Para  $n = 0$ , se obtiene  $a_0 [s(s-1) + s - \nu^2] = 0$ , que conduce a la ec. indicial  $s^2 - \nu^2 = 0$ , es decir,

$$s = \pm \nu$$

**I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE**

---

Se obtiene entonces  $a_1 = 0$ . Para  $n \geq 2$ ,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2s)}$$

Si  $s = \nu$ , con  $Re(\nu) \geq 0$ , esto implica

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = -\frac{1}{4n(n+\nu)} = \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}(n-1)!\Gamma(n+\nu)}{(-1)^n2^{2n+2}n!\Gamma(n+\nu+1)}$$

Hemos utilizado aquí la función **Gamma**, definida para  $x > 0$  por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

que satisface, para  $x > 1$ , la relación

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

(esto puede verse integrando por partes). Además,  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Se obtiene entonces, para  $x$  natural o semientero positivo,

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{n!2^{2n}}$$

Para  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+1/2}[1 + O(x^{-1})]$ , lo cual determina el comportamiento de  $n!$  para  $n$  grande. La definición anterior es también válida para  $x$  complejo si  $Re[x] > 0$ . Para  $x$  complejo arbitrario,  $\Gamma(x)$  se define por continuación analítica, siendo analítica en todo  $C$  excepto en los enteros negativos o en  $x = 0$ , donde posee polos simples ( $\lim_{x \rightarrow -n} (x+n)\Gamma(x) = (-1)^n/n!$ ). Se verifica además que  $\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)\sin(\nu\pi) = -\pi$ .

La relación recursiva se satisface entonces si

$$a_{2n} = c \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\Gamma(n+\nu+1)}$$

Para  $c = 2^{-\nu}$  se obtiene así la función de Bessel

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$$

llamada también función de Bessel de primera especie, que es una de las soluciones de (211). Aplicando el criterio del cociente puede verse fácilmente que la serie converge  $\forall x \in \mathfrak{R}$  o  $x \in C$ . Si  $\nu$  no es entero, la otra solución lin. indep. de (211) es

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}$$

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

Si  $\nu > 0$  es entero, la relación recursiva para  $s = -\nu$  no puede prolongarse para  $n \geq \nu$ , y el procedimiento anterior no es válido para obtener la segunda solución lin. indep. (para  $n \geq 0$  entero,  $J_{-n}(x) \equiv \lim_{\nu \rightarrow -n} J_\nu(x) = (-1)^n J_n(x)$ ). Se utiliza entonces, como segunda solución, la función

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

denominada función de Bessel de segunda especie o función de Neumann o Weber. La ventaja es que el límite de  $Y_\nu(x)$  para  $\nu \rightarrow n$ , con  $n > 0$  entero, proporciona la otra solución lin. indep. de (211), que es de la forma  $J_\nu(x) \ln(x) + x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ . La forma explícita de  $Y_\nu(x)$ , así como otras propiedades y funciones asociadas, se las detalla en el *apéndice gráfico*.

Para  $\nu$  *semientero*,  $J_\nu(x)$  y  $Y_\nu(x)$  pueden expresarse en términos de senos y cosenos. Por ej., es fácil ver que  $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\sin x}{x}$ ,  $Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\cos x}{x}$ . En general,

$$\begin{aligned} J_{n+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ Y_{n+1/2}(x) &= -\sqrt{\frac{2x}{\pi}} x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right) \end{aligned}$$

Cabe destacar finalmente que si  $k \neq 0$ , las funciones  $J_\nu(kx)$ ,  $Y_\nu(kx)$ , son soluciones lin. indep. de la ec.

$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$$

El número  $k$  puede ser real o complejo. Para  $k = i$ , las funciones  $J_\nu(ix)$ ,  $Y_\nu(ix)$  son combinaciones lineales de las denominadas funciones de Bessel modificadas  $I_\nu(x)$ ,  $K_\nu(x)$  (véase apéndice).

### **Función Hipergeométrica confluyente**

Consideremos la ec.

$$xu'' + (b - x)u' - au = 0 \quad (212)$$

que surge en muchos problemas de mecánica cuántica al resolver la ec. de Schrödinger monodimensional. Las raíces de la ec. indicial  $s(s - 1) + bs = 0$  son  $s = 0$  y  $s = 1 - b$ . Por lo tanto, si  $b$  no es 0 o entero negativo, una de las soluciones es una serie de potencias  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , con

$$c_{n+1} = c_n \frac{n + a}{(n + 1)(n + b)}$$

y  $c_0 \neq 0$ . Para  $c_0 = 1$  se obtiene así la solución

$$\begin{aligned} u_1(x) = F[a, b, x] &\equiv 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{2!b(b+1)}x^2 + \dots \\ &= \frac{\Gamma[b]}{\Gamma[a]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma[n+a]}{n! \Gamma[n+b]} x^n \end{aligned} \quad (213)$$

que se denomina *función hipergeométrica confluyente*. Converge  $\forall x$  (como es obvio a partir de (212)). Para  $a = -n$ , con  $n$  entero positivo, se reduce a un *polinomio* de grado  $n$ . En particular, los *polinomios de Laguerre* generalizados se definen, para  $0 \leq m \leq n$ , como

$$L_n^m[x] = (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F[-(n-m), m+1, x]$$

y surgen al resolver la ec. de Schrödinger para el átomo de Hidrógeno. Para  $m = 0$  se denominan simplemente polinomios de Laguerre.

Es fácil ver que si  $b$  no es entero, la otra solución l.i. de (212) es

$$u_2(x) = x^{1-b} F[a - b + 1, 2 - b, x]$$

ya que si se sustituye  $u = x^{1-b}w$  se obtiene para  $w$  la ec.

$$xw'' + (2 - b - x)w' - (a - b + 1)w = 0$$

que es de la forma (212) con  $b \rightarrow 2 - b$ ,  $a \rightarrow a - b + 1$ .

Para  $x \rightarrow \infty$  y  $a \neq -n$ ,  $F[a, b, x] \approx \frac{\Gamma[b]}{\Gamma[a]} e^x x^{a-b}$ . La función  $F[a, b, x]$  y sus propiedades está también directamente incorporada a la mayoría de los programas de cálculo analítico.

### **Función Hipergeométrica**

Consideremos ahora la ec.

$$x(1-x)u'' + [b - (a_1 + a_2 + 1)x]u' - a_1 a_2 u = 0 \quad (214)$$

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

Las raíces de la ec. indicial  $s(s-1) + bs = 0$  son nuevamente  $s = 0$  y  $s = 1 - b$ . Por lo tanto, si  $b$  no es 0 o entero negativo, una de las soluciones es una serie de potencias  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , con

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n \frac{n(n-1 + a_1 + a_2 + 1) + a_1 a_2}{(n+1)(n+b)} \\ &= c_n \frac{(n+a_1)(n+a_2)}{(n+1)(n+b)} \end{aligned}$$

y  $c_0 \neq 0$ . Para  $c_0 = 1$  se obtiene así la solución

$$\begin{aligned} u_1(x) &= F[a_1, a_2, b, x] \\ &\equiv 1 + \frac{a_1 a_2}{1! b} x + \frac{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{2! b(b+1)} x^2 + \dots \\ &= \frac{\Gamma[b]}{\Gamma[a_1]\Gamma[a_2]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma[n+a_1]\Gamma[n+a_2]}{n!\Gamma[n+b]} x^n \end{aligned} \quad (215)$$

que se denomina *función hipergeométrica*. Converge para  $|x| < 1$  (como es obvio a partir de la ecuación) y es obviamente simétrica con respecto a  $a_1$  y  $a_2$ . Si  $a_1 = -n$  (o  $a_2 = -n$ ), con  $n$  entero positivo, se reduce a un *polinomio* de grado  $n$ . En particular, los *polinomios de Jacobi* se definen como

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{\Gamma[\alpha + n + 1]}{n!\Gamma[\alpha + 1]} F[-n, \alpha + \beta + n + 1, \alpha + 1, (1-x)/2]$$

Para  $\alpha = \beta = 0$  se reducen a los polinomios de Legendre, vistos anteriormente.

Es fácil ver que si  $b$  no es entero, la otra solución l.i. de (214) es

$$u_2(x) = x^{1-b} F[a_2 - b + 1, a_1 - b + 1, 2 - b, x]$$

ya que si se sustituye  $u = x^{1-b} w$  se obtiene para  $w$  una ec. del tipo (214) con  $a_1 \rightarrow a_2 - b + 1$ ,  $a_2 \rightarrow a_1 - b + 1$  y  $b \rightarrow 2 - b$ . Esta función y sus propiedades está también incorporada a los programas de cálculo analítico.

#### I.3.6. Autovalores y Autofunciones de $L$

Consideremos nuevamente el operador de Sturm-Liouville  $L$ . Si existen un número  $\lambda$  y una función  $v(x) \neq 0$  que satisfacen la ecuación

$$L[v(x)] = \lambda v(x) \quad (216)$$

$\forall x \in [a, b]$ , conjuntamente con alguna de las condiciones de contorno mencionadas en la sección I.3.2, se dice que  $\lambda$  es un *autovalor* (o valor propio) y  $v(x)$  una *autofunción*

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

(o función propia) de  $L$  con dicha condición de contorno. Enfatizamos que  $\lambda$  y  $v(x)$  dependen tanto de  $p$  y  $q$  como de la condición de contorno.

Es obvio que si  $v(x)$  es autofunción,  $cv(x)$ , con  $c$  una constante no nula, es también autofunción con el mismo autovalor, por lo que éstas quedan definidas a menos de una constante multiplicativa.

Hemos visto que la función de Green para una determinada condición de contorno local (3) o (179) existe si y sólo si no existe una función  $u(x) \neq 0$  que satisfaga  $L[u] = 0$  con dichas condiciones. Esto implica que  $G(x, x')$  existe si y sólo si  $L$  no posee *ningún autovalor nulo* con dicha condición de contorno (de allí proviene el nombre de modos cero).

Es fácil mostrar el siguiente

**Teorema I.3.5** *Si  $L$  es autoadjunto, las autofunciones de  $L$  correspondientes a autovalores distintos son ortogonales respecto del producto interno  $(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx$ .*

*Prueba:* Si  $L[v_i(x)] = \lambda_i v_i(x)$ ,  $L[v_j(x)] = \lambda_j v_j(x)$ ,

$$0 = (v_j, L[v_i]) - (L[v_j], v_i) = (\lambda_i - \lambda_j) \int_a^b v_i(x)v_j(x)dx$$

de donde

$$\int_a^b v_j(x)v_i(x)dx = 0 \text{ si } \lambda_j \neq \lambda_i$$

□

En muchas situaciones, como veremos más adelante al estudiar funciones especiales, surge un problema similar en el que debe encontrarse una función  $v(x) \neq 0$  que satisfaga, conjuntamente con la condición de contorno, la ecuación

$$L[v(x)] = \lambda \rho(x)v(x) \tag{217}$$

donde  $\rho(x) > 0$  es una función continua y *positiva*, denominada usualmente “función de peso”. En este caso, se dice que  $\lambda$  es autovalor y  $v$  autofunción de  $L$  con peso  $\rho$  (y una dada condición de contorno).

Siguiendo el procedimiento anterior, puede mostrarse que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos resultan ortogonales respecto del producto interno

$$(u, v)_\rho \equiv \int_a^b \rho(x)u(x)v(x)dx \tag{218}$$

es decir

$$\int_a^b \rho(x)v_j(x)v_i(x)dx = 0 \text{ si } \lambda_j \neq \lambda_i$$



### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

donde  $L[v_i(x)] = \lambda_i \rho(x)v_i(x)$ ,  $L[v_j(x)] = \lambda_j \rho(x)v_j(x)$ .

*Propiedades fundamentales:*

Tanto en el caso (216) como (217), el problema de valores propios de un operador de Sturm Liouville autoadjunto en un intervalo finito  $[a, b]$ , con una determinada condición de contorno, posee las siguientes propiedades fundamentales (la demostración de las mismas se realiza en el marco de la teoría de ecuaciones integrales y queda, entonces, para el curso de Métodos Matemáticos de la Física):

1) Existe un conjunto numerable de autovalores

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \dots$$

correspondientes a autofunciones  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x), \dots$ , que satisfacen  $L[v_n(x)] = \lambda \rho(x)v_n(x)$  y son *ortogonales* respecto del producto interno (218):

$$(v_i, v_j)_\rho = \int_a^b \rho(x)v_i(x)v_j(x)dx = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Para las condiciones de contorno locales (179),  $\lambda_i < \lambda_j$  si  $i \neq j$ , ya que no pueden existir dos soluciones linealmente independientes de  $L[u] = \lambda \rho u$  para un mismo  $\lambda$  que satisfagan ambas (179) (pues en tal caso el wronskiano sería nulo).

2) Cualquier función  $u(x)$  definida en el intervalo  $[a, b]$  que satisfaga las condiciones de contorno y posea derivada segunda, puede escribirse en términos de las autofunciones  $v_n(x)$  por medio de una serie absoluta y uniformemente convergente en este intervalo:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x) \tag{219}$$

El conjunto de todas las autofunciones forma pues una *base* del espacio vectorial de funciones derivables a segundo orden que satisfacen las condiciones de contorno en el intervalo  $[a, b]$ . Se dice entonces que las autofunciones de  $L$  forman un conjunto *completo*.

*Consecuencias:*

a) Asumiendo válido el desarrollo (219), es fácil mostrar que los coeficientes  $c_n$  están dados por

$$c_n = \frac{\int_a^b \rho(x)v_n(x)u(x)dx}{\int_a^b \rho(x)v_n^2(x)dx} = \frac{(v_n, u)_\rho}{(v_n, v_n)_\rho} \tag{220}$$

En efecto, multiplicando (219) por  $\rho(x)v_n(x)$  e integrando, obtenemos, debido a la *ortogonalidad* de las autofunciones,

### 1.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x)v_n(x)u(x)dx &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b \rho(x)v_m(x)v_n(x)dx \\ &= c_n \int_a^b \rho(x)v_n^2(x)dx \end{aligned}$$

obteniéndose (220). Queda también claro que, para una dada  $u$ , los coeficientes del desarrollo son únicos. Si  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x) = 0 \Rightarrow c_n = 0 \forall n$ .

b) Base ortonormal: Como hemos dicho, cada autofunción  $v_n(x)$  está definida a menos de una constante multiplicativa. Resulta cómodo elegir esas constantes de modo de obtener una base en la que las autofunciones (que llamaremos  $z_n(x)$ ) estén *normalizadas*, es decir,  $(z_n, z_n)_\rho = \int_a^b \rho(x)v_n^2(x)dx = 1 \forall n$ , de modo que

$$(z_m, z_n)_\rho = \int_a^b \rho(x)z_m(x)z_n(x)dx = \delta_{mn}$$

En tal caso,

$$c_n = \int_a^b \rho(x)z_n(x)u(x)dx = (z_n, u)_\rho$$

c) En una base ortonormal, el cuadrado de la *norma* de  $u$ , definida por

$$\|u\| = (u, u)_\rho^{1/2} = \left[ \int_a^b \rho(x)u^2(x)dx \right]^{1/2}$$

puede expresarse como

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \sum_{n,m=1}^{\infty} c_n c_m \int_a^b \rho(x)z_n(x)z_m(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \end{aligned} \tag{221}$$

La igualdad anterior se denomina identidad de Parseval y constituye la generalización del teorema de Pitágoras.

Es válida para cualquier conjunto completo de funciones ortonormales  $\{z_i(x), i = 1, 2, \dots\}$ . Si el conjunto es incompleto, obtenemos en cambio  $\|u\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ .

c) Dada la suma finita

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^m b_n z_n(x)$$

donde las autofunciones  $z_n(x)$  son ortonormales, el error cuadrático medio, definido por

I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

$$\varepsilon_m^2 \equiv \|u(x) - S_m(x)\|^2 = \int_a^b \rho(x)[u(x) - S_m(x)]^2 dx$$

es mínimo para  $b_n = c_n = \int_a^b \rho(x)z_n(x)u(x)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^2 &= \int_a^b \rho[u^2 - 2 \sum_{n=1}^m b_n z_n u + \sum_{n,n'=1}^m b_n b_{n'} z_n z_{n'}] dx \\ &= \|u\|^2 + \sum_{n=1}^m [b_n^2 - 2b_n c_n] = \|u\|^2 - \sum_{n=1}^m c_n^2 + \sum_{n=1}^m (c_n - b_n)^2 \end{aligned}$$

obteniéndose el mínimo valor para  $b_n = c_n$ .

La “mejor” aproximación a  $u(x)$  por medio de una suma finita se obtiene, pues para  $b_n = c_n$ , si definimos como “mejor” aquella suma que minimiza el error promedio anterior.

La ecuación anterior también muestra que (para  $b_n = c_n$ ),  $\sum_{n=1}^m c_n^2 = \|u\|^2 - \varepsilon_m^2 \leq \|u\|^2$ ,  $\forall m$ , indicando entonces que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$  es una serie convergente.

*Desarrollo de la función de Green en autofunciones. Tipos de convergencia*

La propiedad 2) requiere, para que el desarrollo en autofunciones converja absoluta y uniformemente, que la función a desarrollar admita derivada segunda y satisfaga las condiciones de contorno. Ciertamente, este no es el caso para la función de Green, cuya derivada primera es discontinua. Sin embargo, puede mostrarse que existe para ella un desarrollo de la forma

$$G(x, x') = \sum_n \frac{z_n(x)z_n(x')}{\lambda_n},$$

que converge a  $G(x, x')$  débilmente (en el sentido de las distribuciones).

Consideremos ahora la ec. gral. inhomogénea

$$L[u] = f(x) \tag{222}$$

donde  $u$  debe satisfacer alguna de las condiciones de contorno mencionadas. Asumiendo que podemos desarrollar tanto  $u$  como  $f(x)/\rho(x)$  en autofunciones normalizadas  $v_n(x)$ , con  $L[v_n(x)] = \lambda_n \rho(x)v_n(x)$ , es decir,

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x), \quad c_n = \int_a^b \rho(x)v_n(x)u(x)dx \tag{223}$$

$$f(x) = \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(x), \quad f_n = \int_a^b v_n(x)f(x)dx \tag{224}$$

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

se obtiene, al reemplazar en (222),

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \lambda_n - f_n) \rho(x) v_n(x) = 0$$

de donde, asumiendo  $\rho(x) > 0$  y  $\lambda_n \neq 0$ ,

$$c_n = f_n / \lambda_n$$

Se puede llegar al mismo resultado directamente mult. la ec. (222) por  $v_n(x)$  e integrando:

$$\int_a^b v_n(x) L[u(x)] dx = \int_a^b v_n(x) f(x) dx$$

de donde, teniendo en cuenta el carácter autoadjunto de  $L$  se obtiene la relación

$$\lambda_n c_n = f_n$$

Podemos entonces escribir la solución como

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n v_n(x)}{\lambda_n} = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'$$

donde

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(x')}{\lambda_n} \tag{225}$$

Esta expresión constituye la *expansión en autofunciones* de la función de Green  $G(x, x')$ , vista en la clase 8. Es muy útil y será utilizada y discutida en las próximas clases. Notemos que  $G(x, x')$  existe si y sólo si no existe ningún autovalor nulo, en acuerdo con discusiones previas.

Es preciso destacar, no obstante, que la convergencia de este tipo de desarrollos es más débil que la convergencia puntual. Sea  $S_m(x) = \sum_{n=1}^m c_n v_n(x)$ .

Se dice que  $S_m(x)$  converge *puntualmente* a  $u(x)$  para  $m \rightarrow \infty$  si  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = u(x) \forall x \in [a, b]$ .

Se dice en cambio que  $S_m(x)$  converge *en media* a  $u(x)$  si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u(x) - S_m(x)\|^2 = 0$$

donde  $\|o\|^2 = \int_a^b \rho(x) o^2(x) dx$ . La convergencia puntual asegura la convergencia en media, pero la última no asegura la primera (ya que por ejemplo  $S_m(x)$  puede diferir de  $u(x)$  en un número finito de puntos sin que esto afecte a la integral). Esto ocurre por ejemplo con el desarrollo en autofunciones de funciones  $u(x)$  continuas a trozos.

Finalmente, se dice que  $S_m(x)$  converge a  $u(x)$  *como distribución* (convergencia débil) si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b S_m(x) \phi(x) dx = \int_a^b u(x) \phi(x) dx$$

I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA  
DE STURM-LIOUVILLE

---

para cualquier función de prueba  $\phi(x)$  en  $[a, b]$ . Esta última condición es mucho más débil que las anteriores, ya que ni siquiera requiere que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)$  sea convergente. Por ejemplo, si  $\delta(x - x')/\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \Rightarrow c_n = \int_a^b v_n(x) \delta(x - x') dx = v_n(x')$ , de modo que  $\delta(x - x') = \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) v_n(x')$ , donde la igualdad sólo indica igualdad como distribución. La serie de la derecha de hecho no converge, pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) v_n(x') \neq 0$ . Sin embargo, si  $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x)$ , con  $a_n = (v_n, \phi)_{\rho}$ ,  $\Rightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \rho(x) v_n(x) v_n(x') \phi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x') = \phi(x')$ , de modo que la serie converge como distribución a  $\delta(x - x')$ .

Puede verse entonces a partir de (225) que

$$L[G(x, x')] = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(x) v_n(x) v_n(x') = \delta(x - x')$$

$G(x, x')$  puede pues también obtenerse directamente resolviendo (222) para  $f(x) = \delta(x - x')$ .

*Problema variacional asociado*

El problema de valores propios de  $L$  está asociado a un problema variacional.

Para  $u \neq 0$  y derivable, definimos el funcional

$$H[u] = \frac{E[u]}{\|u\|^2} = \frac{\int_a^b [p(x)u'(x)^2 + q(x)u^2(x)] dx}{\int_a^b \rho(x)u^2(x) dx}$$

que satisface  $H[\alpha u] = H[u]$  si  $\alpha \neq 0$  siendo, por lo tanto, independiente de la norma de  $u$ . Veremos luego que  $H[u]$  puede interpretarse como una energía. Notemos que  $H[u] \geq 0$  si  $q(x) \geq 0$ .

Podemos preguntarnos ahora cuál de todas las funciones  $u(x)$  con derivada segunda que satisfacen alguna condición de contorno (de las mencionadas) es la que *minimiza*  $H(u)$ , y cuál es el valor mínimo de  $H[u]$  entre estas funciones.

Suponiendo que tal función *existe*, y llamándola  $v$ , con  $H[v] = \lambda$ , debe cumplirse

$$H[v + \delta v] \geq H[v] = \lambda$$

$\forall$  función  $\delta v$  que satisface la condición de contorno.

Considerando ahora  $\delta v$  pequeño, y conservando términos sólo hasta orden  $\delta v$ , obtenemos

$$\begin{aligned} H[v + \delta v] - H[v] &\approx 2\|v\|^{-2} \int_a^b [pv'(\delta v)' + (q - \lambda\rho)v\delta v] dx \\ &= 2\|v\|^{-2} \int_a^b [L[v] - \lambda\rho v](\delta v) dx + [pv'\delta v]_a^b \end{aligned} \quad (226)$$

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

donde hemos integrado por partes el primer término ( $\int_a^b pv'(\delta v)' dx = pv'\delta v|_a^b - \int_a^b (pv')'\delta v dx$ ).

Por lo tanto, si  $H[v]$  es mínimo, la ec. (226) debe anularse para cualquier variación  $\delta v(x)$  que satisfaga la condición de contorno.

Consideremos, primero, la condición de contorno de *Dirichlet*  $u(a) = u(b) = 0$ . En tal caso  $\delta v(a) = \delta v(b) = 0$  y el último término en (226) se anula, lo que implica

$$L[v(x)] - \lambda\rho(x)v(x) = 0 \quad (227)$$

es decir,  $v(x)$  debe ser *autofunción* de  $L$  con autovalor  $\lambda$ .

Es claro entonces que dicha autofunción debe ser aquella con el autovalor *más bajo*, de modo que  $v(x) \propto v_1(x)$  y  $\lambda = \lambda_1$ .

Notemos que, integrando por partes,

$$\int_a^b pu'^2 dx = pu'u|_a^b - \int_a^b (pu')'u dx$$

por lo que

$$H[u] = \frac{\int_a^b u(x)L[u(x)]dx}{\|u\|^2} \quad \text{si } pu'u|_a^b = 0 \quad (228)$$

Por lo tanto, si  $u(x) = v_n(x)$ , con  $L[v_n] = \lambda\rho v_n$  y  $v_n(a) = v_n(b) = 0$ ,

$$H[v_n] = \lambda_n$$

de modo que  $v = v_1$ , con  $H[v_1] = \lambda_1$ . Si  $q(x) \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 \geq 0$ .

El problema anterior es equivalente a la minimización de  $E[u]$  con la condición adicional  $\|u\| = 1$ , lo que a su vez es equivalente a la minimización de

$$F[u] = E[u] - \lambda\|u\|^2$$

donde  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange. La condición estacionaria  $F[v + \delta v] = F[v] + O(\delta v)^2$  para  $\delta v$  pequeño conduce nuevamente a la ecuación  $L[v(x)] = \lambda\rho(x)v(x)$ , por lo que  $v$  debe ser autofunción de  $L$  y  $\lambda$  el autovalor correspondiente. En tal caso,  $E[v_1] = \lambda_1\|v_1\|$ .

Para las condiciones de *Neumann* ( $u'(a) = u'(b) = 0$ ), puede procederse en forma similar. Sólo cabe aclarar que, en este caso, no es necesario imponer la condición de contorno. La condición  $u'(a) = u'(b) = 0$  surge naturalmente al buscar el *mínimo absoluto* de  $H[u]$ , para anular el último término en (9.7) que aparece al integrar por partes. El primer autovalor correspondiente al problema de Neumann es, pues, *menor* que el correspondientes al problema de Dirichlet:  $\lambda_1^N \leq \lambda_1^D$ .

Consideremos ahora el subespacio  $S_1$  de funciones  $u$  que satisfagan la condición de contorno y que sean *ortogonales* a la primera autofunción  $v_1(x)$ , es decir,

$$(u, v_1)_\rho = \int_a^b \rho(x)v_1(x)u(x)dx = 0$$

Puede demostrarse, siguiendo un procedimiento similar, que el valor mínimo de  $H[u]$  para  $u \in S_1$  se obtiene para una función  $v$  que debe satisfacer también la ecuación (227) con la correspondiente condición de contorno, pero que debe ser obviamente ortogonal a  $v_1$ . Esta función debe pues ser proporcional a la autofunción de  $L$  con el *segundo autovalor*  $\lambda_2$ . Es decir,  $v \propto v_2$ , con  $\lambda = H[v_2] = \lambda_2 \geq \lambda_1$ .

Procediendo en forma análoga, puede probarse que el mínimo de  $H[u]$  en el subespacio  $S_{n-1}$  formado por funciones ortogonales a  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ , se obtiene para  $v \propto v_n$ , siendo el valor mínimo  $H[v_n] = \lambda_n$ . De esta forma puede construirse todo el conjunto de autovalores y autofunciones mediante un procedimiento variacional. Puede probarse también que  $\lambda_n^N \leq \lambda_n^D \forall n$ .

El procedimiento anterior permite probar también la completitud del conjunto de autofunciones. Daremos a continuación un bosquejo de la demostración, asumiendo que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  para  $n \rightarrow \infty$  (véanse los siguientes ejemplos).

Sea  $u(x)$  una función de norma finita que satisface la condición de contorno y consideremos el resto

$$R_m(x) = u(x) - S_m(x)$$

con

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^m c_n v_n(x), \quad c_n = (v_n, u)_\rho$$

y  $(v_n, v_n)_\rho = 1$  (autofunciones normalizadas). Tenemos

$$(v_n, R_m)_\rho = 0, \quad n = 1, \dots, m$$

Por lo tanto,  $H[R_m(x)] \geq \lambda_m$ , pues  $R_m(x)$  es ortogonal a  $v_1, \dots, v_m$ . Además, utilizando (228) y, dado que  $\int_a^b R_m(x)L[S_m(x)]dx = 0$ , se obtiene

$$H[R_m(x)] = \frac{\|u\|^2 H[u] - \sum_{n=1}^m \lambda_n c_n^2}{\|R_m(x)\|^2} \geq \lambda_m$$

de donde, si  $\lambda_m \geq 0$  (como ocurre para  $q(x) \geq 0$ )

$$\|R_m(x)\|^2 \leq \frac{\|u\|^2 H[u]}{\lambda_m}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|R_m(x)\|^2 = 0$$

si  $\lambda_m \rightarrow \infty$ , lo que asegura la convergencia *en media* (pero no la convergencia puntual).

*Aproximaciones variacionales.* La formulación variacional del problema de autovalores de Sturm-Liouville permite desarrollar aproximaciones variacionales en las que

### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

$u(x)$  se aproxima por una cierta función que satisface las condiciones de contorno y que contiene algunos parámetros libres. Estos se optimizan minimizando  $H[u]$ , lográndose así una *cota superior* a  $\lambda_1$  (y en general a  $\lambda_n$ , si imponemos que  $u(x)$  sea ortogonal a  $v_1, \dots, v_{n-1}$ ).

*Ejemplos:*

1) Consideremos  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  en  $[0, b]$ , con  $u(0) = u(b) = 0$ .  
La ec.  $L[v] = \lambda v$ , es decir,

$$-\frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v$$

posee la solución general  $v(x) = Ce^{i\sqrt{\lambda}x} + De^{-i\sqrt{\lambda}x}$ , que puede escribirse como

$$v(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Las condiciones de contorno implican  $B = 0$ , y  $\sin(\sqrt{\lambda}b) = 0$ , por lo que  $\sqrt{\lambda}b = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (para  $n = 0$ ,  $v = 0$ ), es decir,

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las correspondientes autofunciones son

$$v_n(x) = A_n \sin(n\pi x/b) \quad n = 1, 2, \dots$$

con  $A_n \neq 0$ , y puede verificarse que

$$\int_0^b v_n(x)v_m(x)dx = \delta_{nm}A_n^2 b/2$$

Las autofunciones normalizadas corresponden pues a  $A_n = \sqrt{2/b}$ .  
Para funciones que se anulan en los extremos, el valor mínimo de

$$H[u] = \frac{\int_0^b u'^2(x)dx}{\int_0^b u^2(x)dx} = -\frac{\int_0^b u(x)u''(x)dx}{\int_0^b u^2(x)dx}$$

es, entonces,  $\lambda_1 = \pi^2/b^2 \approx 9,87/b^2$  y corresponde a  $v_1(x) = A_1 \sin(\pi x/b)$ .

Por ejemplo, planteando como aproximación variacional una parábola  $u(x) = x(b-x)$ , que satisface  $u(a) = u(b) = 0$ , obtenemos  $H[u] = 10/b^2 > \lambda_1$ .

Es importante destacar que este ejemplo corresponde exactamente al problema cuántico de una partícula en una dimensión confinada al intervalo  $[0, a]$ , libre dentro de este intervalo. La función  $v(x)$ , con  $\|v\|^2 = 1$ , representa en este caso la función de onda de la partícula, y la ecuación  $L[v] = \lambda v$  es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, con  $E_n = \hbar^2 \lambda_n / (2m)$  la energía del estado  $n$ .  $\frac{\hbar^2}{2m} H[u]$  representa aquí el valor



### I.3 PROBLEMAS CON CONDICIONES DE CONTORNO: EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

---

medio de la energía correspondiente a la función de onda  $u(x)$ , el cual es mínimo para  $u(x) = v_1(x)$ .

2) Consideremos nuevamente  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  en  $[0, b]$  con las condiciones de contorno de Neumann  $u'(0) = u'(b) = 0$ . Éstas implican ahora  $B = 0$  y  $\sin(\sqrt{\lambda}b) = 0$ , es decir,

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con autofunciones

$$v_n(x) = B_n \cos(n\pi x/b)$$

Los autovalores son los mismos que en el caso anterior, pero aparece el autovalor adicional  $\lambda_0 = 0$ , en cuyo caso  $v_0 = B_0$ , constante. Se cumple

$$\int_0^b v_n(x)v_m(x)dx = \delta_{nm} B_n^2 \begin{cases} b & n=0 \\ b/2 & n>0 \end{cases}$$

Las autofunciones normalizadas se obtienen para  $B_0 = 1/\sqrt{b}$ ,  $B_n = \sqrt{2/b}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

El valor mínimo de  $H[u]$  para esta condición de contorno es  $\lambda_0 = 0$  (Aquí hemos llamado por conveniencia  $\lambda_0$  al autovalor más bajo de  $L$ ).

3) Nuevamente  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  con las condiciones mixtas  $u(0) = 0$ ,  $u'(b) = 0$ . Estas implican  $B = 0$  y  $\cos(\sqrt{\lambda}b) = 0$ , es decir,

$$\lambda_n = (n + 1/2)^2\pi^2/b^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que son distintos a los hallados en los ejemplos 1 y 2, con autofunciones

$$v_n(x) = A_n \sin[(n + 1/2)\pi x/b]$$

Se cumple

$$\int_0^b v_n(x)v_m(x)dx = \delta_{nm} A_n^2 b/2$$

y las autofunciones normalizadas se obtienen para  $A_n = \sqrt{2/b}$ .

El valor mínimo de  $H[u]$  es  $\lambda_1 = \pi^2/4b^2$ , intermedio entre el mínimo obtenido con las condiciones de Neumann y aquél obtenido con las de Dirichlet.

4) Nuevamente  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  con las condiciones de contorno periódicas  $u(-a) = u(a)$ ,  $u'(-a) = u'(a)$ . Obtenemos las autofunciones

$$v_0 = B_0, \quad v_n(x) = B_n \cos(n\pi x/a), \quad u_n(x) = A_n \sin(n\pi x/a),$$

con  $n = 1, 2, \dots$  correspondientes a los autovalores

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = n^2\pi^2/b^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Para  $n \geq 1$  existen, pues, 2 autofunciones ( $v_n(x)$  y  $u_n(x)$ ) por cada autovalor. Se cumple

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a v_n(x)v_m(x)dx &= \delta_{nm}B_n^2 \begin{cases} 2a & n=0 \\ n > 0 \end{cases}, \\ \int_{-a}^a u_n(x)u_m(x)dx &= \delta_{nm}A_n^2 a, \quad \int_{-a}^a u_n(x)v_m(x)dx = 0 \end{aligned}$$

obteniéndose las autofunciones normalizadas para  $B_0 = 1/\sqrt{2a}$ ,  $B_n = A_n = 1/\sqrt{a}$ . En este caso resulta, en general, más cómodo utilizar una base compleja de autofunciones, dada por

$$\begin{aligned} w_n(x) &= C_n e^{i\pi n x/a} \\ &= C_n [\cos(n\pi x/a) + i \sin(n\pi x/a)], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

que es ortogonal respecto del producto interno  $(u, v) = \int_{-a}^a u^*(x)v(x)dx$ :

$$\int_{-a}^a w_n^*(x)w_m(x)dx = \delta_{nm}|C_n|^2 2a$$

## I.4. Serie de Fourier

Como hemos visto en la sección I.3.6, cada operador de Sturm-Liouville determina un desarrollo para una dada función  $f$  en serie de autofunciones dentro de un cierto intervalo. Para  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  y  $\rho(x) = 1$ , la serie correspondiente se denomina, en general, serie trigonométrica o serie de Fourier, y la estudiaremos aquí en detalle. Analizaremos primero la base proporcionada por las autofunciones periódicas de  $L$  en  $[-\pi, \pi]$ , de la cual pueden derivarse los demás casos.

Es fácil verificar (ver trabajos prácticos) que las autofunciones correspondientes a tal operador de Sturm-Liouville son de la forma:

$$u_0(x) = C; \quad u_n(x) = \begin{cases} A \sin(nx) \\ B \cos(nx) \end{cases} \quad n = 1, \dots, \infty \quad (229)$$

La propiedad fundamental 2) en la misma sección asegura la convergencia absoluta y uniforme del desarrollo en estas autofunciones para funciones con derivada segunda que satisfacen las condiciones de contorno periódicas en  $[-\pi, \pi]$ ; pero el desarrollo es aplicable también a funciones más generales, como discutiremos más adelante en esta sección.

### I.4.1. Coeficientes de Fourier

Supongamos, primero, que tal desarrollo es convergente a  $f(x)$ . En ese caso, pueden determinarse los coeficientes

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \forall x \in (-\pi, \pi) \quad (230)$$

En primer lugar, asumiendo válida la expansión (230), los coeficientes  $a_n, b_n$  pueden determinarse haciendo uso de la ortogonalidad (y la norma) de las funciones  $\cos(nx), \sin(nx)$  discutida anteriormente. Por ejemplo, integrando ambos lados de (230) entre  $-\pi$  y  $\pi$ , tendremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = \pi a_0. \quad (231)$$

Notemos que  $\frac{1}{2}a_0 = \bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$  es el *valor medio* de  $f$  en  $[-\pi, \pi]$ .

Para calcular  $a_n, n \neq 0$ , multiplicamos ambos miembros de (230) por  $\cos(kx), k \neq 0$  e integramos entre  $-\pi$  y  $\pi$ , de donde resulta

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(kx), \quad k = 1, \dots, \infty. \quad (232)$$

Similarmente, multiplicando por  $\sin(kx), k \neq 0$  e integrando:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(kx), \quad k = 1, \dots, \infty. \quad (233)$$

Los coeficientes así determinados se denominan coeficientes de Fourier. La serie resultante está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dx' f(x') [\cos(nx) \cos(nx') + \sin(nx) \sin(nx')], \quad (234)$$

que puede escribirse en forma más compacta como

$$f(x) = \bar{f} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dx' f(x') \cos[n(x - x')]. \quad (235)$$

### I.4.2. Teoremas de Fourier sobre convergencia

Según se adelantó, estudiaremos ahora condiciones más débiles para la convergencia de la serie de Fourier, contenidas en dos teoremas, también conocidos como teoremas de Fourier. Para poder demostrarlos, necesitaremos demostrar antes el siguiente lema:

**Lema I.4.1 (de Riemann-Lebesgue)** Si  $g$  es continua en  $[a, b]$  salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos en los que permanece acotada, entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin(sx + \alpha) dx = 0. \quad (236)$$

*Demostración del lema:* Si  $g$  es derivable en  $[a, b]$ , la demostración es inmediata. En efecto, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) \sin(sx + \alpha) dx &= - \int_a^b g(x) \frac{d}{dx} \frac{\cos(sx + \alpha)}{s} dx = \\ &= - g(x) \frac{\cos(sx + \alpha)}{s} \Big|_a^b + \int_a^b g'(x) \frac{\cos(sx + \alpha)}{s} dx, \end{aligned} \quad (237)$$

expresión que tiende a 0 para  $s \rightarrow \infty$ . El mismo razonamiento es válido si  $g$  es derivable salvo en un número finito de puntos, siempre y cuando existan (y sean finitas) las derivadas laterales.

Si  $g$  es sólo continua en  $[a, b]$ , sea  $(x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$  una partición de  $[a, b]$ , con  $x_i - x_{i-1} = (b - a)/n$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(x) \sin(sx + \alpha) dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) \sin(sx + \alpha) dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left\{ g(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(sx + \alpha) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} [(g(x) - g(x_i))] \sin(sx + \alpha) dx \right\} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[ |g(x_i)| \left| \frac{\cos(sx_i + \alpha) - \cos(sx_{i-1} + \alpha)}{s} \right| + \frac{m_i(b-a)}{n} \right] \\ &\leq \frac{2Mn}{s} + M_n(b-a) \end{aligned} \quad (238)$$

donde  $M$  es el máximo de  $g$  en  $[a, b]$ ,  $m_i$  el máximo de  $|g(x) - g(x_i)|$  en  $[x_{i-1}, x_i]$  y  $M_n$  el máximo de los  $m_i$ . Por lo tanto,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \int_a^b g(x) \sin(sx) dx \right| \leq M_n(b-a)$$

pero  $M_n$  puede hacerse tan chico como se desee al aumentar  $n$  por ser  $g$  continua ( $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ ). Lo mismo ocurre si reemplazamos  $\sin(sx + \alpha)$  por  $\cos(sx + \alpha)$ . Esto demuestra el lema aún si  $g(x)$  no es derivable en ningún punto.

Finalmente, si  $g$  es discontinua sólo en un número finito de puntos en los que permanece acotada, podemos separar estos puntos  $x_c$  mediante integrales  $\int_{x_c - \varepsilon}^{x_c + \varepsilon} g(x) \sin(sx + \alpha) dx$ , que tienden a 0 para  $\varepsilon \rightarrow 0$  por ser  $g$  acotada, y repetir el razonamiento anterior en los intervalos restantes donde es continua.

□

Ahora sí podemos demostrar tres teoremas de Fourier sobre la convergencia de la serie.

**Teorema I.4.2 (Teorema 1 de Fourier)** Sea  $f(x)$  derivable (por lo tanto, continua) en  $[-\pi, \pi]$ , entonces la igualdad (235) vale  $\forall x \in (-\pi, \pi)$ . Si, además,  $f(-\pi) = f(\pi)$ , la serie converge a  $f$  en  $[-\pi, \pi]$ .

*Demostración : Las sumas parciales en (235) están dadas por*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos(mx) \cos(mt) + \sin(mx) \sin(mt) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos[m(t-x)] \right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} K_n(s) &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos[ms] = \frac{1}{2} \sum_{m=-n}^n e^{ims} = \frac{e^{i(n+1)s} - e^{-ins}}{2(e^{is} - 1)} \\ &= \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})s]}{2 \sin[\frac{1}{2}s]}, \end{aligned} \tag{239}$$

donde se asume que, si  $s = 0$  o, en general,  $s = 2k\pi$ , con  $k$  entero,  $K_n(2k\pi) = \lim_{s \rightarrow 2k\pi} K_n(s) = n + \frac{1}{2}$ , que es el valor correcto de la suma para  $s = 2k\pi$ . Además, de la suma de cosenos que define a  $K_n(s)$  se ve que

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x) dt = \pi \tag{240}$$

Por lo tanto, sumando y restando  $f(x)$ ,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(x)) K_n(t-x) dt \\ &= f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t) - f(x)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]} \sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)] dt \end{aligned} \tag{241}$$

Usando el lema de Riemann-Lebesgue es, ahora, inmediato demostrar la convergencia para  $x \in (-\pi, \pi)$ . En este caso, la función  $g(t) = \frac{f(t) - f(x)}{2 \sin[(t-x)/2]}$  si  $t \neq x$ , con  $g(x) = f'(x)$ , es continua  $\forall t \in [-\pi, \pi]$ , incluyendo  $t = x$ , si  $f$  es derivable:

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]} = f'(x),$$

por lo que la integral en (241) se anula para  $n \rightarrow \infty$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \quad \forall x \in (-\pi, \pi). \quad (242)$$

Hasta a quí, hemos demostrado la primera parte del enunciado.

Si  $x = \pm\pi$ , el denominador de  $g(t)$  se anula tanto para  $t \rightarrow \pi$  como  $t \rightarrow -\pi$ . Sin embargo, si  $x = \pm\pi$ ,  $K_n(t-x)$  es una función par de  $t$ . En efecto,

$$\begin{aligned} K_n(t \mp \pi) &= \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})(t \mp \pi)]}{2 \sin(\frac{t \mp \pi}{2})} = \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})(-t \pm \pi)]}{2 \sin(\frac{-t \pm \pi}{2})} \\ &= \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})(-t \mp \pi)]}{2 \sin(\frac{-t \mp \pi}{2})} \end{aligned} \quad (243)$$

y, por lo tanto,

$$\int_{-\pi}^0 K_n(t-x) dt = \int_0^{\pi} K_n(t-x) dt = \frac{1}{2} \pi$$

Para  $x = \pm\pi$  podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t) - f(\pi)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]} \sin[(n + \frac{1}{2})(t-x)] dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(t) - f(-\pi)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x)]} \sin[(n + \frac{1}{2})(t-x)] dt \end{aligned} \quad (244)$$

donde el primer y segundo cociente permanecen acotados para  $t \rightarrow \pi$  y  $t \rightarrow -\pi$  respectivamente (tienden a  $f'(\pm\pi)$ ). Aplicando el lema de Riemann, obtenemos pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\pm\pi) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

coincidiendo con  $f(\pm\pi)$  si  $f(\pi) = f(-\pi)$ .

□

**Teorema I.4.3 (Teorema2 de Fourier)** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  pero  $f'(x)$  no existe en un número finito de puntos aislados  $x_c$ , donde sí existen, en cambio, las derivadas laterales

$$f'^{\pm}(x_c) = \lim_{t \rightarrow x_c^{\pm}} \frac{f(t) - f(x_c)}{t - x_c}, \quad (245)$$

la serie de Fourier converge a  $f(x)$ , aún para  $x = x_c$ .

*Demostración:* En tal caso  $g(t) = \frac{f(t) - f(x)}{2 \sin[(t-x)/2]}$  es continua para  $t \neq x$  y permanece acotada para  $t \rightarrow x$ , aún si  $x = x_c$  ( $\lim_{t \rightarrow x_c^{\pm}} g(t) = f'^{\pm}(x_c)$ ), cumpliendo con las condiciones del lema de Riemann-Lebesgue.

□

**Teorema I.4.4 (Lema 3 de Fourier)** Si  $f$  es continua y derivable en  $[-\pi, \pi]$  salvo en un número finito de puntos aislados  $x_c$ , en los que existen sin embargo los límites y derivadas laterales

$$f(x_c^\pm) \equiv \lim_{x \rightarrow x_c^\pm} f(x), \quad f'^\pm(x_c) = \lim_{t \rightarrow x_c^\pm} \frac{f(t) - f(x_c^\pm)}{t - x_c}$$

entonces la serie también converge a  $f(x)$  en los puntos  $x \in (-\pi, \pi)$  donde  $f$  es continua. En los puntos  $x_c$  donde es discontinua, la serie converge al punto medio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{2}[f(x_c^+) + f(x_c^-)] \quad (246)$$

*Demostración:* En primer lugar, si  $x \in (-\pi, \pi)$ , combinando (240) con el lema (236) obtenemos, para  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(t-x) dt \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+\varepsilon} K_n(t-x) dt = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{\pi} K_n(t-x) dt \end{aligned} \quad (247)$$

por ser  $K_n(s)$  par.

Notemos ahora que  $g(t) = \frac{f(t)-f(x)}{2 \sin[(t-x)/2]}$  satisface las condiciones del lema para  $t \in [-\pi, \pi]$  si  $x \neq x_c$ , y para  $t \neq x_c$  si  $x = x_c$ . En este caso,

$$S_n(x_c) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_c} f(t) K_n(t-x_c) dt + \frac{1}{\pi} \int_{x_c}^{\pi} f(t) K_n(t-x_c) dt \quad (248)$$

La segunda integral podemos escribirla como

$$\frac{f(x_c^+)}{\pi} \int_{x_c}^{\pi} K_n(t-x_c) dt + \int_{x_c}^{\pi} \frac{f(t)-f(x_c^+)}{2\pi \sin[\frac{1}{2}(t-x_c)]} \sin[(n+\frac{1}{2})(t-x_c)] dt$$

Para  $n \rightarrow \infty$ , el segundo término se anula por el lema de Riemann, pues  $g(t) = \frac{f(t)-f(x_c^+)}{2 \sin[\frac{1}{2}(t-x_c)]}$  permanece acotado para  $t \rightarrow x_c^+$  ( $\lim_{t \rightarrow x_c^+} g(t) = f'^+(x_c)$ ), mientras que el primer término tiende a  $\frac{1}{2}f(x_c^+)$ . Análogamente, la primera integral en (248) tiende a  $\frac{1}{2}f(x_c^-)$ . Esto conduce al resultado (246).

□

**Convergencia uniforme:** Si  $f$  posee derivada continua en  $[-\pi, \pi]$ , y  $f[-\pi] = f[\pi]$ , puede demostrarse que la convergencia de la serie de Fourier es *absoluta y uniforme* para  $x \in [-\pi, \pi]$ . En este caso la serie de Fourier es derivable término a término, convergiendo la serie derivada a  $f'(x)$  para  $x \in (-\pi, \pi)$ .

Si  $f(x)$  es discontinua en un punto  $x_c$  o  $f[-\pi] \neq f[\pi]$  entonces la convergencia *no es uniforme*. En tal caso, si derivamos la serie término a término obtendremos una serie

que no necesariamente es convergente punto a punto (véase el ejemplo 4 siguiente). Otra de las manifestaciones de la convergencia no uniforme es el fenómeno de Gibbs en los bordes de una discontinuidad.

*Condiciones más débiles de convergencia:* Puede demostrarse que si  $f$  es continua en  $[-\pi, \pi]$  y posee un número *finito* de máximos y mínimos locales  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$  para  $x \in (-\pi, \pi)$ , aún cuando  $f$  no sea derivable. Y en 1966 fue demostrado que sólo asumiendo que  $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^p dx$  existe para  $p = 1$  y  $p = 2 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0$$

Este tipo de convergencia se denomina convergencia en media, la cual es menos restrictiva que la convergencia puntual. Aún menos exigente es la convergencia como distribución (convergencia débil): Se dice que  $S_n$  converge a  $f$  como distribución si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

para cualquier función de prueba  $g$ , aún si la serie  $S_n(x)$  no converge puntualmente en ningún punto (véase el ejemplo 3). Este tipo de convergencia es frecuentemente utilizado en física.

### I.4.3. Forma compleja del desarrollo

Como  $\frac{\cos(nx)}{i \sin(nx)} = \frac{1}{2}(e^{inx} \pm e^{-inx})$ , podemos escribir (193) como una serie de potencias en  $e^{ix}$ ,

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_n^* e^{-inx} = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

con  $P \sum_{n=-\infty}^{\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m$  el valor principal y

$$c_n = c_{-n}^* = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx$$

### I.4.4. Serie de Fourier para otros intervalos

Si  $f$  está definida en  $[-a, a]$ , el reemplazo  $x \rightarrow x\pi/a$  conduce al desarrollo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x), \quad (249)$$



para  $x \in (-a, a)$ , donde

$$\omega = \pi/a$$

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin(n\omega x) dx$$

La serie converge a una función periódica de período  $2a = 2\pi/\omega$ , siendo pues  $\omega$  la frecuencia angular correspondiente. En la forma compleja,

$$f(x) = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) e^{-in\omega x} dx$$

### I.4.5. Desarrollos de medio rango. Series de senos y de cosenos

Si  $f(x) = f(-x)$  (función *par*)  $\Rightarrow b_n = 0 \forall n$  y

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) \\ a_n &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos(n\omega x) dx \end{aligned} \quad (250)$$

Si  $f(x) = -f(-x)$  (función *impar*)  $\Rightarrow a_n = 0 \forall n$  y

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x) \\ b_n &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin(n\omega x) dx \end{aligned} \quad (251)$$

Una función  $f$  definida en  $[0, a]$  puede pues desarrollarse en serie de cosenos o senos, convergiendo la serie a la extensión periódica par o impar de  $f$ . Estos desarrollos corresponden al problema de autovalores de  $L$  en  $[0, a]$ , con las condición de contorno de Neumann (caso par) y Dirichlet (caso impar).

Norma de  $f$ : En términos de los coeficientes de Fourier, la identidad de Parseval toma la forma

$$\|f\|^2 = \int_{-a}^a f^2(x) dx = a \left[ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right] = aP \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

**Ejemplos:**

1)  $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi]$ . Se obtiene  $a_n = 0 \forall n$  y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

por lo que

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}, \quad |x| < \pi \quad (252)$$

En  $x = \pm\pi$ , la serie converge a  $\frac{1}{2}[f(\pi) + f(-\pi)] = 0$ .

La serie converge en realidad a la extensión periódica

$$f(x) = x - 2n\pi \quad \text{si} \quad -\pi + 2n\pi < x < \pi + 2n\pi$$

siendo discontinua en  $x = \pm\pi + 2n\pi$ .

2) Si  $f(x) = \frac{1}{2}x^2, b_n = 0 \forall n$  y  $a_n = 2(-1)^n/n^2$  si  $n \geq 1$ , con  $a_0 = \pi^2/3$ , por lo que

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad |x| \leq \pi$$

que coincide con la integral término a término de la serie (252). El desarrollo converge también en  $x = \pm\pi$ , ya que  $f(\pi) = f(-\pi)$ . Para  $x = 0$  y  $\pi$ , el desarrollo anterior conduce a las identidades

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3)

$$f(x) = \frac{1}{2a}, \quad |x| < a < \pi$$

con  $f(x) = 0$  si  $|x| > a$ . Obtenemos  $b_n = 0$  y  $a_n = \sin(na)/(n\pi a)$  si  $n \geq 1$ , con  $a_0 = 1/\pi$ . Por lo tanto,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{na} \cos(nx) \right], \quad |x| \leq \pi \quad (253)$$

Para  $x = \pm a$ , la serie converge al punto medio  $\frac{1}{4a}$ .

Se pueden extraer dos conclusiones muy importantes:

i) Al disminuir  $a$ , aumenta el número de coeficientes  $a_n$  con valor apreciable en (253). En efecto,  $\sin(na)/na \approx 1$  si  $n \ll 1/a$ , anulándose por primera vez para  $n \approx \pi/a$ . El número de coeficientes  $a_n$  con valor apreciable aumenta pues como  $1/a$  al disminuir  $a$ . *Cuanto más corto es el pulso (respecto de  $\pi$ ) mayor es el número de frecuencias necesarias para representar correctamente el pulso.*

ii) Para  $a \rightarrow 0$ ,  $f(x) \rightarrow \delta(x)$  y obtenemos como límite

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \right] = \frac{1}{2\pi} P \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}, \quad |x| \leq \pi$$

que puede obtenerse directamente utilizando las fórmulas usuales para  $f(x) = \delta(x)$ . La serie anterior *no converge puntualmente*, pero si converge *como distribución* a  $\delta(x)$  para  $|x| \leq \pi$ . En efecto, la suma parcial es

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos(mx) \right] = \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})x]}{2\pi \sin(\frac{1}{2}x)}$$

y satisface, utilizando el lema de Riemann,

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) dx = 1, \quad \forall n \geq 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) f(x) dx &= f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x) - f(0)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \sin[(n + \frac{1}{2})x] dx \\ &= f(0) \end{aligned} \quad (254)$$

$\forall$  función de prueba  $f$ . Por periodicidad obtenemos entonces, para  $x \in \mathfrak{R}$ ,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2m\pi) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \right] = \frac{1}{2\pi} P \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$$

4) Si derivamos término a término el desarrollo (252) de  $f(x) = x$  obtenemos la serie

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(nx) \quad (255)$$

que no converge puntualmente. Esto se debe a que  $f(-\pi) \neq f(\pi)$ , siendo entonces la convergencia de (252) no uniforme. No obstante la serie (255) converge como distribución a

$$f'(x) = 1 - 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi + 2m\pi)$$

#### I.4 SERIE DE FOURIER

---

que es la derivada (como distribución) de la extensión periódica de  $x$ .

5) Desarrollo en serie de Fourier de medio rango de la función de Green en  $[0, a]$  para condiciones de contorno de Dirichlet:

$$G(x, x') = \begin{cases} x(1-x'/a) & 0 < x < x' < a \\ x'(1-x/a) & 0 < x' < x < a \end{cases}$$

Se obtiene

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a G(x, x') \sin(n\pi x/a) dx = \sin(n\pi x'/a)/(n\pi/a)^2$$

y por lo tanto

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/a) \sin(n\pi x'/a)}{(n\pi/a)^2}$$

que coincide con el desarrollo general en autofunciones dado en la clase 12 ( $G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)u_n(x')/\lambda_n$ ).

**Ejemplo de desarrollo en serie de Fourier:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

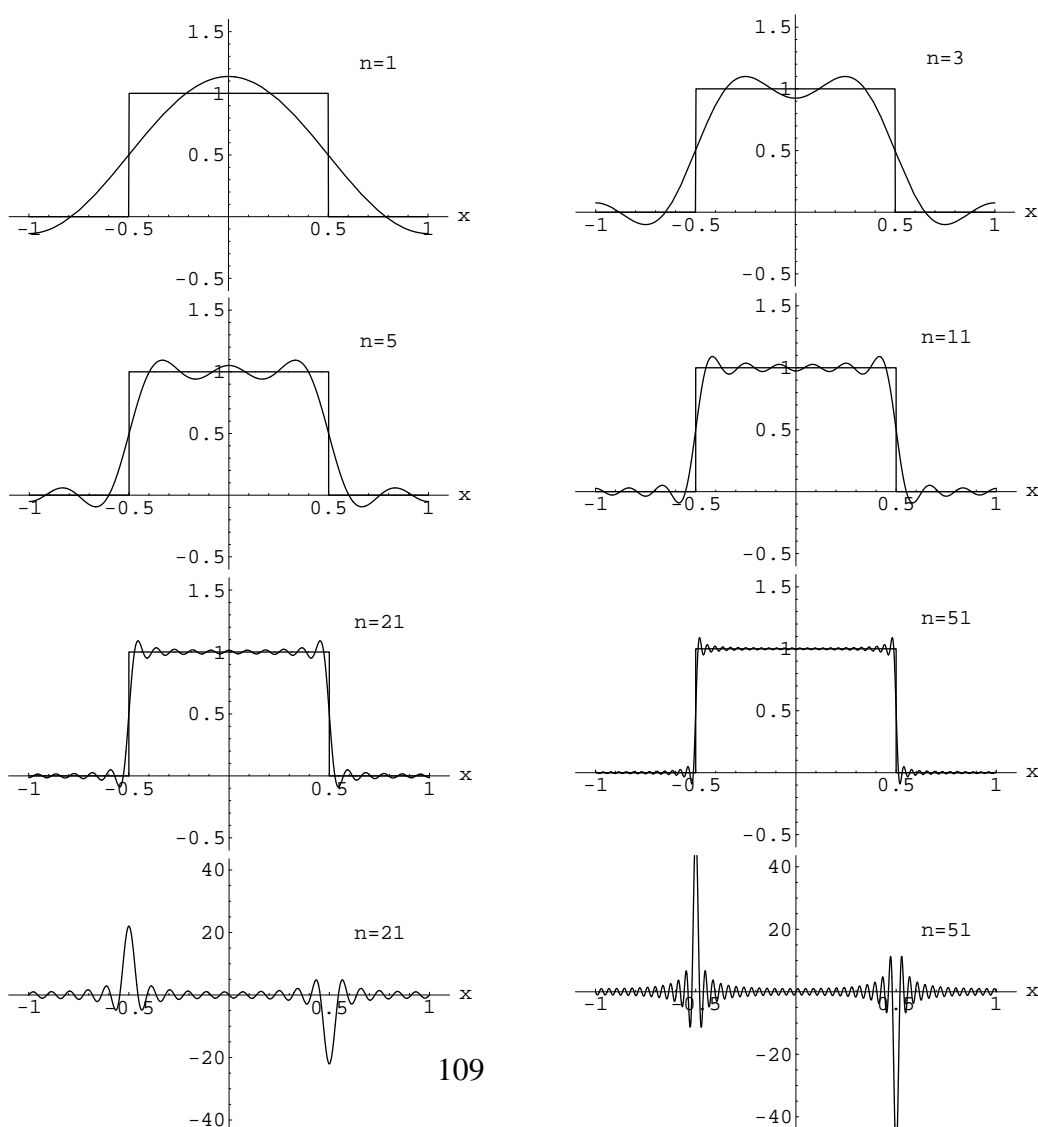
Intervalo:  $[-1, 1]$ .

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \frac{2}{n\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 0$$

con  $a_0 = 1$ . Suma parcial de orden  $n$ :

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos(m\pi x)$$

Se muestran los gráficos de  $f$  y  $S_n$  para  $n = 1, 3, 5, 11, 21, 51$ . Los dos últimos paneles muestran la gráfica de la derivada  $\frac{dS_n(x)}{dx}$  para  $n = 21$  y  $51$ , que converge como distribución a  $\delta(x + \frac{1}{2}) - \delta(x - \frac{1}{2})$  en  $[-1, 1]$ .



**I.5. Transformada de Fourier**

**I.6. Funciones especiales**

**I.7. Bibliografía correspondiente al Capítulo I**

**Parte II**

**Ecuaciones Diferenciales en Derivadas  
Parciales**





**Parte III**

**Probabilidades y Estadística**



**Parte IV**  
**Apéndice**



**IV.1.**

## Apéndice: Funciones de Bessel

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^n, \quad Y_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\nu \notin \mathbb{Z})$$

$$Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi} [J_\nu(z) \ln \frac{z}{2} - \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [\phi(n) + \phi(n + \nu)]}{2n!(n + \nu)!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^n - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu - n - 1)!}{2n!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^{2n}] \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

con  $\phi(m) = \Gamma'(m + 1)/\Gamma(m)$  y la última suma presente si  $\nu \neq 0$ .  $J_\nu(kx)$  y  $Y_\nu(kx)$  son soluciones de la ec. diferencial

$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$$

Fórmulas asintóticas para  $z$  grande:

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right], \quad Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

Funciones de Hankel (o funciones de Bessel de 3ª especie):  $H_\nu^{1,2}(z) = J_\nu(z) \pm iY_\nu(z)$ .

Funciones de Bessel modificadas:

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = i^{\nu+1} \frac{\pi}{2} [J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)]$$

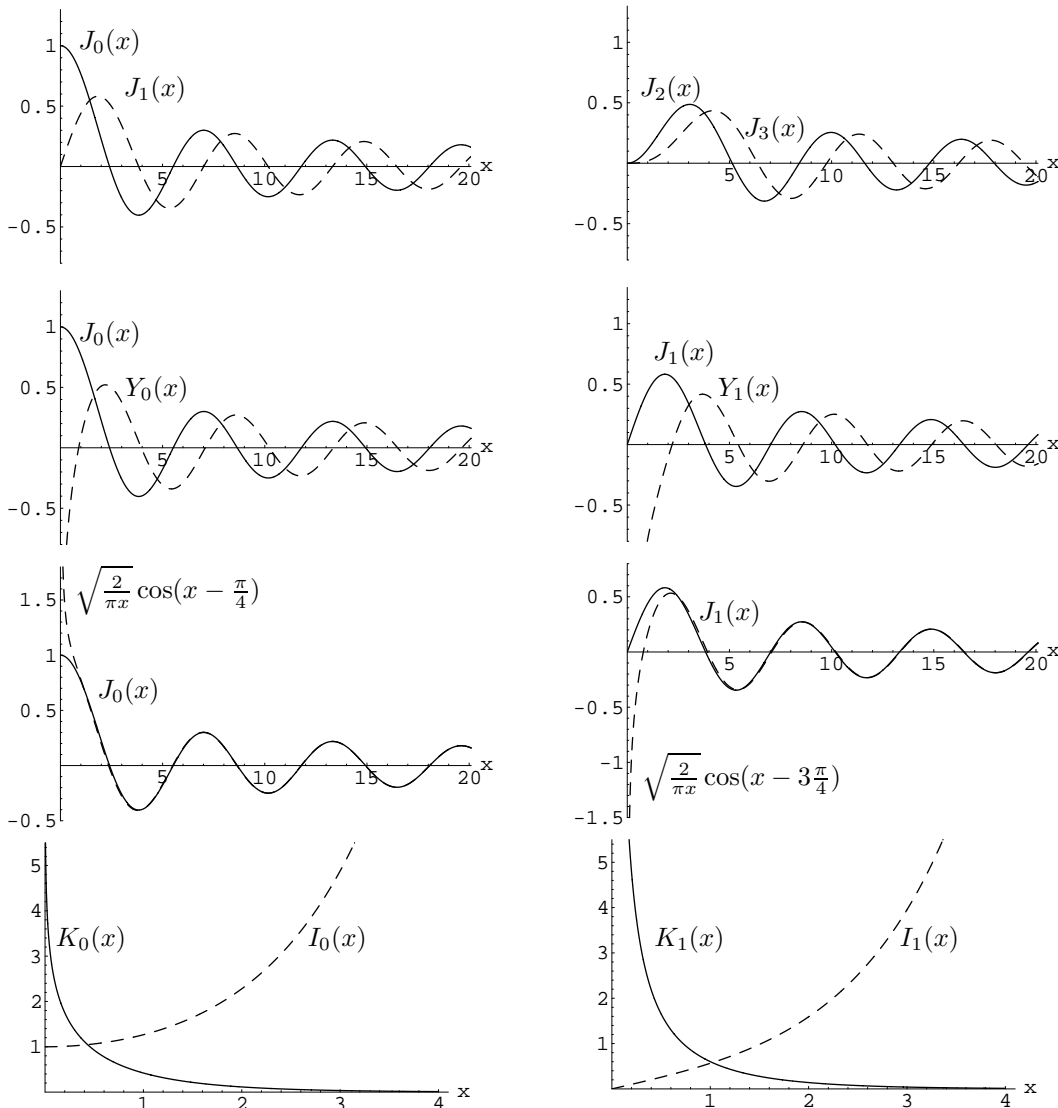
$I_\nu(kz)$  y  $K_\nu(kz)$  son soluciones de la ec. diferencial

$$u'' + \frac{u'}{x} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$$

Para  $z$  grande,

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$$

Gráficos:



## Ecuaciones de Legendre, Bessel e Hipergeométricas (Resumen)

### 1) Ecuación de Legendre:

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \lambda(\lambda+1)u = 0 \quad (1)$$

Puede escribirse también en la forma de Sturm-Liouville,

$$-[(1-x^2)u']' = \lambda(\lambda+1)u$$

o en la forma estándar

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0 \quad (2)$$

con  $A(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ ,  $B(x) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2}$ . Tanto  $A(x)$  como  $B(x)$  son analíticos para  $|x| < 1$  (o sea,  $|z| < 1$ ). La ec. (1) surge en problemas físicos al considerar la ecuación de autovalores del Laplaciano en una superficie esférica:  $-\Delta_\Omega u = \lambda(\lambda+1)u$ , donde  $\Delta_\Omega$  es la parte angular del Laplaciano en coord. esféricas y  $u$  una función dependiente sólo de  $\theta$ . En tal caso la ecuación anterior resulta

$$-\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta}) = \lambda(\lambda+1)u$$

la cual se reduce a (1) si  $x = \cos \theta$  ( $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial x}$ ). Como  $\lambda(\lambda+1) = (\lambda+1/2)^2 - 1/4$ , es suficiente considerar  $\text{Re}[\lambda] \geq -1/2$ . Planteando  $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \{c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n[n(n-1) + 2n - \lambda(\lambda+1)]\} = 0$$

de donde

$$c_{n+2} = c_n \frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)} = -c_n \frac{(n+\lambda+1)(\lambda-n)}{(n+2)(n+1)}$$

Para  $c_1 = 0$  y  $c_0 \neq 0$ , se obtiene la solución *par*, donde  $c_{2n+1} = 0$  y

$$c_2 = -c_0 \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}, \quad c_4 = c_0 \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3)}{4!}, \dots$$

mientras que para  $c_0 = 0$  y  $c_1 \neq 0$ , se obtiene la solución *impar*, donde  $c_{2n} = 0$  y

$$c_3 = -c_0 \frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{3!}, \quad c_5 = c_0 \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+4)}{5!}, \dots$$

Dado que  $|c_{n+2}/c_n| \rightarrow 1$  para  $n \rightarrow \infty$ , el radio de convergencia de la serie resultante es 1. Puede verse que la solución no es en general acotada para  $x \in (-1, 1)$  ( $|u(x)| \rightarrow \infty$  en al menos uno de los bordes).

La excepción ocurre si  $\lambda = l$ , con  $l$  entero positivo, en cuyo caso  $c_{l+2} = 0$ . Esto implica que la solución con la *misma paridad* de  $l$  se convierte en un *polinomio de grado  $l$* , que se denomina *Polinomio de Legendre*. En tal caso, los coeficientes no nulos del polinomio están dados por

$$c_{2n+i} = c_i \frac{(-1)^n (l_2!)^2 (l+2n)!}{l!(l_2-n)!(l_2+n)!(2n+i)!}, \quad i = 0, 1, \quad n = 0, \dots, l_2$$

donde  $l_2 = [l/2]$  ( $[ ]$  denota parte entera) y  $i = 0$  corresponde a la solución *par* para  $l$  par,  $i = 1$  a la solución *impar* para  $l$  impar. Los polinomios de Legendre se definen exactamente como la solución para los coeficientes iniciales  $c_i = (-1)^{l_2} l! / [(l_2!)^2 2^{l-i}]$ ,  $i = 0, 1$ , y pueden por lo tanto escribirse como (llamando  $k = l_2 - n$ )

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{l_2} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}$$

Dado que  $\frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} x^{l-2k} = \frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2k}$ , y  $k!(l-k)! = l! / \binom{l}{k}$ , pueden también reescribirse como

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} x^{2l-2k} \\ &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \end{aligned} \quad (3)$$

(Fórmula de Rodrigues). Algunos ejemplos son

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_1(x) &= x & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned} \quad (4)$$

Los Polinomios de Legendre satisfacen

$$\begin{aligned} P_l(1) &= 1 \\ \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx &= \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1} \quad (\text{ortogonalidad}) \\ l P_l(x) &= (2l-1)x P_{l-1}(x) - (l-1)P_{l-2}(x), \quad l \geq 2 \end{aligned}$$

Cabe destacar entonces que soluciones *acotadas* de la ec. (1) para  $x \in (-1, 1)$  y  $\lambda \geq -1/2$  se obtienen únicamente cuando  $\lambda = l$ , entero, y en tal caso para la solución con la misma paridad de  $l$ , la cual es un polinomio proporcional al Polinomio de Legendre (3). Por ejemplo, puede verificar el lector que para  $\lambda = 0$ , las soluciones l.i. de (1) son  $u_1(x) = P_0(x) = 1$  y  $u_2(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ , siendo  $u_2(x)$  la solución impar, la cual diverge para  $x \rightarrow \pm 1$ .

La solución general de (1) para  $\lambda$  arbitrario puede expresarse como

$$u(x) = c_1 P_\lambda(x) + c_2 Q_\lambda(x)$$

donde  $P_\lambda(x)$  y  $Q_\lambda(x)$  se denominan usualmente funciones de Legendre de primera y segunda especie. Para  $\lambda = l$  natural,  $P_\lambda(x)$  es el polinomio de Legendre. Ambas están directamente incorporadas en la mayoría de los programas de cómputo analítico tales como *mathematica*. Nótese que  $Q_\lambda(x)$ , y también  $P_\lambda(x)$  para  $\lambda$  no entero, presentan divergencias de tipo logarítmico en al menos uno de los bordes  $x = \pm 1$  (véase sec. 7).

### 2) Ecuación asociada de Legendre:

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + [\lambda(\lambda+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]u = 0 \quad (5)$$

En la forma de Sturm-Liouville, equivale a

$$-[(1-x^2)u']' + \frac{m^2}{1-x^2}u = \lambda(\lambda+1)u$$

Se reduce a la ec. de Legendre para  $m=0$ , y surge al considerar la ec.  $-\Delta_\Omega u = \lambda(\lambda+1)u$  para  $u(\theta, \phi) = u(\theta)e^{im\phi}$ :

$$-\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{m^2}{\sin^2\theta}u = \lambda(\lambda+1)u$$

la cual se reduce a (5) tras el reemplazo  $x = \cos\theta$ . Podemos asumir obviamente  $\text{Re}[m] \geq 0$ ,  $\text{Re}[\lambda] \geq -1/2$ . Es conveniente realizar la transformación  $u = (1-x^2)^{m/2}w$ . Se obtiene entonces para  $w$ ,

$$(1-x^2)w'' - 2(m+1)xw' + [\lambda(\lambda+1) - m(m+1)]w = 0 \quad (6)$$

Planteando una serie de potencias para  $w$ , se obtiene

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= c_n \frac{n(n-1) + (2n+m)(m+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)} \\ &= -c_n \frac{(n+\lambda+1+m)(\lambda-m-n)}{(n+2)(n+1)} \end{aligned} \quad (7)$$

Si  $\lambda-m = k$ , con  $k$  entero positivo,  $c_{k+2} = 0$  y la solución con la misma paridad de  $k$  es un polinomio de grado  $k$ . Estas son las únicas soluciones acotadas de (6) en  $(-1, 1)$ . En el caso usual,  $m$  es entero, y soluciones acotadas de (6) existirán entonces sólo para  $\lambda = l \geq m$ , con  $l$  entero positivo. La solución con la misma paridad de  $l-m$  será entonces un polinomio de grado  $l-m$ .

Si bien podemos obtener dichos polinomios por medio de (7), es fácil ver que si  $u(x)$  es solución de la ec. de Legendre (1), entonces su derivada emésima  $u^{(m)}(x)$  satisface la ec. (6):

$$(1-x^2)u^{(m+2)} - 2(m+1)xu^{(m+1)} + [\lambda(\lambda+1) - m(m+1)]u^{(m)} = 0$$

Por lo tanto, para  $m$  entero positivo, las soluciones de (5) son de la forma  $(1-x^2)^{m/2}u^{(m)}(x)$ , con  $u(x)$  solución de (1). Para  $\lambda$  y  $m$  entero, con  $\lambda = l \geq m$ , obtenemos así las denominadas *funciones asociadas de Legendre*,

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad 0 \leq m \leq l$$

que son polinomios sólo para  $m$  entero (en tal caso de grado  $l$ ) y que constituyen las únicas soluciones acotadas de (5) en  $(-1, 1)$ . Se define también

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

verificándose

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx &= \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \\ \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^{-m}(x) dx &= \delta_{ll'} (-1)^m \frac{2}{2l+1} \end{aligned}$$

La solución general de (5) para  $m$  y  $\lambda$  arbitrario se expresa como

$$u(x) = c_1 P_\lambda^m(x) + c_2 Q_\lambda^m(x)$$

siendo  $P_\lambda^m(x)$ ,  $Q_\lambda^m(x)$  las funciones asociadas de Legendre de primera y segunda especie. Para  $m \neq 0$ , presentan en general divergencias del tipo  $(1-x)^{-|m|}$  y  $(x+1)^{-|m|}$  en  $x=1$  y/o en  $x=-1$  (véase sec. 7), salvo  $P_\lambda^m(x)$  en los casos ya descriptos.

### 3) Ecuación de Bessel

$$u'' + \frac{u'}{x} + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0 \quad (8)$$

Es de la forma contemplada en el teorema de Fuchs-Frobenius y surge en problemas físicos con simetría cilíndrica o esférica al resolver la parte radial del Laplaciano, como veremos en próximas clases. Planteando  $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}$  obtenemos, definiendo  $a_{-2} = a_{-1} = 0$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{s+n-2} [a_n [(n+s)(n+s-1) + (n+s) - \nu^2] + a_{n-2}] = 0$$

Para  $n=0$ , se obtiene  $a_0[s(s-1) + s - \nu^2] = 0$ , que conduce a la ecuación indicial  $s^2 - \nu^2 = 0$ , es decir,

$$s = \pm\nu$$

Se obtiene entonces  $a_1 = 0$ . Para  $n \geq 2$ ,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2s)}$$

Si  $s = \nu$ , con  $\text{Re}(\nu) \geq 0$ , esto implica

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = -\frac{1}{4n(n+\nu)} = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} (n-1)! \Gamma(n+\nu)}{(-1)^n 2^{2n+2} n! \Gamma(n+\nu+1)}$$

Hemos utilizado aquí la función **Gamma**, definida para  $x > 0$  por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

que satisface, para  $x > 1$ , la relación

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

(esto puede verse integrando por partes). Además,  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Se obtiene entonces, para  $x$  natural o semientero positivo,

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{n!2^{2n}}$$

Para  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+1/2} [1 + O(x^{-1})]$ , lo cual determina el comportamiento de  $n!$  para  $n$  grande. La definición anterior es también válida para  $x$  complejo si  $\text{Re}[x] > 0$ . Para  $x$  complejo arbitrario,  $\Gamma(x)$  se define



por continuación analítica, siendo analítica en todo  $C$  excepto en los enteros negativos o en  $x = 0$ , donde posee polos simples ( $\lim_{x \rightarrow -n} (x+n)\Gamma(x) = (-1)^n/n!$ ). Se verifica además que  $\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)\sin(\nu\pi) = -\pi$ .

La relación recursiva se satisface entonces si

$$a_{2n} = c \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\Gamma(n+\nu+1)}$$

Para  $c = 2^{-\nu}$  se obtiene así la función de Bessel

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$$

llamada también función de Bessel de primera especie, que es una de las soluciones de (8). Aplicando el criterio del cociente puede verse fácilmente que la serie converge  $\forall x \in \mathfrak{R}$  o  $x \in C$ . Si  $\nu$  no es entero, la otra solución lin. indep. de (8) es (véase sec. 6)

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}$$

Si  $\nu > 0$  es entero, la relación recursiva para  $s = -\nu$  no puede prolongarse para  $n \geq \nu$ , y el procedimiento anterior no es válido para obtener la segunda solución lin. indep. (para  $n \geq 0$  entero,  $J_{-n}(x) \equiv \lim_{\nu \rightarrow -n} J_\nu(x) = (-1)^n J_n(x)$ ). Se utiliza entonces, como segunda solución

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

denominada función de Bessel de segunda especie o función de Neumann o Weber. La ventaja es que el límite de  $Y_\nu(x)$  para  $\nu \rightarrow n$ , con  $n > 0$  entero, proporciona la otra solución lin. indep. de (8), que es de la forma  $J_\nu(x) \ln(x) + x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ . La forma explícita de  $Y_\nu(x)$ , así como otras propiedades y funciones asociadas, se las detalla en el apéndice gráfico.

Para  $\nu$  semientero,  $J_\nu(x)$  y  $Y_\nu(x)$  pueden expresarse en términos de senos y cosenos. Por ej., es fácil ver que  $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\sin x}{x}$ ,  $Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\cos x}{x}$ . En general,

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$Y_{n+1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2x}{\pi}} x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

Cabe destacar finalmente que si  $k \neq 0$ , las funciones  $J_\nu(kx)$ ,  $Y_\nu(kx)$ , son soluciones lin. indep. de la ec.

$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$$

El número  $k$  puede ser real o complejo. Para  $k = i$ , las funciones  $J_\nu(ix)$ ,  $Y_\nu(ix)$  son combinaciones lineales de las denominadas funciones de Bessel modificadas  $I_\nu(x)$ ,  $K_\nu(x)$  (véase apéndice).

#### 4) Función Hipergeométrica confluyente

Consideremos la ecuación

$$xu'' + (b-x)u' - au = 0 \quad (9)$$

que surge en muchos problemas de mecánica cuántica al resolver la ec. de Schrödinger monodimensional. Las raíces de la ec. indicial  $s(s-1) + bs = 0$  son  $s = 0$  y  $s = 1-b$ . Por lo tanto, si  $b$  no es 0 o entero negativo, una de las soluciones es una serie de potencias  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , con

$$c_{n+1} = c_n \frac{n+a}{(n+1)(n+b)}$$

y  $c_0 \neq 0$ . Para  $c_0 = 1$  se obtiene así la solución

$$\begin{aligned} u_1(x) = F[a, b, x] &\equiv 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{2!b(b+1)}x^2 + \dots \\ &= \frac{\Gamma[b]}{\Gamma[a]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma[n+a]}{n!\Gamma[n+b]} x^n \end{aligned} \quad (10)$$

que se denomina *función hipergeométrica confluyente*. Converge  $\forall x$  (como es obvio a partir de (9)). Para  $a = -n$ , con  $n$  entero positivo, se reduce a un *polinomio* de grado  $n$ . En particular, los *polinomios de Laguerre* generalizados se definen, para  $0 \leq m \leq n$ , como

$$L_n^m[x] = (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F[-(n-m), m+1, x]$$

y surgen al resolver la ec. de Schrödinger para el átomo de Hidrógeno. Para  $m = 0$  se denominan simplemente polinomios de Laguerre.

Es fácil ver que si  $b$  no es entero, la otra solución l.i. de (9) es

$$u_2(x) = x^{1-b} F[a-b+1, 2-b, x]$$

ya que si se sustituye  $u = x^{1-b}w$  se obtiene para  $w$  la ec.

$$xw'' + (2-b-x)w' - (a-b+1)w = 0$$

que es de la forma (9) con  $b \rightarrow 2-b$ ,  $a \rightarrow a-b+1$ .

Para  $x \rightarrow \infty$  y  $a \neq -n$ ,  $F[a, b, x] \approx \frac{\Gamma[b]}{\Gamma[a]} e^x x^{a-b}$ . La función  $F[a, b, x]$  y sus propiedades está también directamente incorporada a la mayoría de los programas de cálculo analítico.

#### 5) Función Hipergeométrica

Consideremos ahora la ecuación

$$x(1-x)u'' + [b - (a_1 + a_2 + 1)x]u' - a_1 a_2 u = 0 \quad (11)$$

Las raíces de la ec. indicial  $s(s-1) + bs = 0$  son nuevamente  $s = 0$  y  $s = 1-b$ . Por lo tanto, si  $b$  no es 0 o entero negativo, una de las soluciones es una serie de potencias  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , con

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n \frac{n(n-1+a_1+a_2+1) + a_1 a_2}{(n+1)(n+b)} \\ &= c_n \frac{(n+a_1)(n+a_2)}{(n+1)(n+b)} \end{aligned}$$

y  $c_0 \neq 0$ . Para  $c_0 = 1$  se obtiene así la solución

$$\begin{aligned} u_1(x) &= F[a_1, a_2, b, x] \\ &\equiv 1 + \frac{a_1 a_2}{1! b} x + \frac{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{2! b(b+1)} x^2 + \dots \\ &= \frac{\Gamma[b]}{\Gamma[a_1]\Gamma[a_2]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma[n+a_1]\Gamma[n+a_2]}{n!\Gamma[n+b]} x^n \quad (12) \end{aligned}$$

que se denomina *función hipergeométrica*. Converge para  $|x| < 1$  (como es obvio a partir de la ecuación) y es obviamente simétrica con respecto a  $a_1$  y  $a_2$ . Si  $a_1 = -n$  (o  $a_2 = -n$ ), con  $n$  entero positivo, se reduce a un *polinomio* de grado  $n$ . En particular, los *polinomios de Jacobi* se definen como

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{\Gamma[\alpha+n+1]}{n!\Gamma[\alpha+1]} F[-n, \alpha+\beta+n+1, \alpha+1, (1-x)/2]$$

Para  $\alpha = \beta = 0$  se reducen a los polinomios de Legendre, vistos anteriormente. Es fácil ver que si  $b$  no es entero, la otra solución l.i. de (11) es

$$u_2(x) = x^{1-b} F[a_2 - b + 1, a_1 - b + 1, 2 - b, x]$$

ya que si se sustituye  $u = x^{1-b} w$  se obtiene para  $w$  una ec. del tipo (11) con  $a_1 \rightarrow a_2 - b + 1$ ,  $a_2 \rightarrow a_1 - b + 1$  y  $b \rightarrow 2 - b$ . Esta función y sus propiedades está también incorporada a los programas de cálculo analítico.

## 6) Método general para hallar la segunda solución

Supongamos que se conoce una solución  $u_1(x)$  de la ecuación lineal (2). La otra solución lin. indep. puede hallarse planteando una solución del tipo

$$u_2(x) = v(x)u_1(x)$$

En efecto, reemplazando en (2) obtenemos para  $v$  la ec.

$$u_1(x)v'' + (2u_1'(x) + A(x)u_1(x))v' = 0$$

que es una ec. lineal de primer orden en  $v'$ . Su solución es  $v'(x) = cu_1^{-2}(x)e^{-\int A(x)dx}$ , de donde

$$v(x) = c \int e^{-\int A(x)dx} / u_1^2(x) dx \quad (13)$$

Aunque no resulta a veces el método más cómodo, puede aplicarse para cualquier  $A(x)$ . Nótese que  $v(x)$  no depende explícitamente de  $B(x)$ . El método puede utilizarse también para determinar el comportamiento de la segunda solución en la vecindad de puntos singulares.

Para el caso del teorema de Frobenius Fuchs, puede verse de (13) que si  $u_1(x)$  es de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$ , con  $s$  la raíz de la ecuación indicial ( $s = \frac{1}{2}(1 - A_{-1} \pm r)$ ,  $r = \sqrt{(1 - A_{-1}^2) - 4B_{-2}}$ ), entonces

$$v(x) = c \int x^{-2s-A_{-1}} R(x) dx$$

donde  $R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$  (con  $r_0 \neq 0$ ) y  $2s + A_{-1} = 1 + r$ . Por lo tanto, si  $r$  no es entero,  $u_2(x) = x^{s'} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ , con  $s' = s - r$  la otra raíz, mientras que si  $r = m$  natural,  $u_2(x)$  será de la forma  $Cu_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} x^{s'+n}$ , con  $C \neq 0$  si  $r_m \neq 0$ .

Como ej. simple, consideremos la ec.  $u'' - k^2 u = 0$ , cuyas soluciones son  $u(x) = c_{\pm} e^{\pm kx}$ . Si  $u_1(x) = e^{kx} \Rightarrow v(x) \propto e^{-2kx}$ , de donde  $u_2(x) \propto e^{-kx}$ . Si tomamos  $u_1(x) = \cosh(kx) \Rightarrow v(x) \propto \tanh(kx)$ , de donde  $u_2(x) = \sinh(x)$ .

## 7) Condiciones de contorno cuando $p(x)$ se anula en un extremo

La ecuación de autovalores de Sturm-Liouville,

$$L[u] = -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda\rho(x)u$$

puede escribirse, si  $p(x) > 0$  en  $(a, b)$ , como

$$u'' + A(x)u' + B(x)u = 0, \quad (14)$$

$$A(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}, \quad B(x) = \frac{\lambda\rho(x) - q(x)}{p(x)} \quad (15)$$

Hasta ahora habíamos supuesto  $p(x) > 0$  en  $[a, b]$ , con  $p$  y  $q$  continuos en ese intervalo. Consideremos ahora el caso en que  $p(x)$  posee un cero *simple* en  $x = a$ , es decir,

$$p(x) = c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots, \quad c_1 > 0$$

en un intervalo  $[a, r]$ , permaneciendo positiva y continua en el resto del intervalo. En tal caso,  $A(x)$  tendrá un *polo simple* con residuo 1 ( $A_{-1} = 1$ ). Mostraremos a continuación que esto implica que *sólo una de las soluciones l.i. de (14) permanecerá acotada para  $x \rightarrow a^+$* , de modo que la condición de contorno a imponer cuando  $p(x)$  posee un cero simple en un extremo es que la autofunción *permanezca acotada para  $x \rightarrow a$* .

Demostración: Si  $q(x)$  es continuo en  $[a, b]$ ,  $B(x)$  poseerá a lo sumo un polo simple en  $x = a$ , por lo que  $B_{-2} = 0$ . Por lo tanto, las raíces de la ec. indicial en  $x = a$ ,

$$s(s-1) + A_{-1}s + B_{-2} = 0$$

son  $s = 0$  y  $s = 1 - A_{-1} = 0$ . En tal caso, una solución de (14) será una serie de potencias naturales, siendo por lo tanto *acotada* en  $x = a$ , mientras que la otra solución tendrá una *divergencia logarítmica* en  $x = a$  (véase la clase de Fuchs-Frobenius). La exigencia de que  $u(x)$  permanezca acotada ya descarta entonces una de las soluciones de la ec. (14). Notemos que el operador  $L$  *permanece autadjunto* para funciones  $u$  que satisfagan

$$\lim_{x \rightarrow a^+} p(x)u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} p(x)u'(x) = 0 \quad (16)$$

Si tanto  $u$  como  $u'$  permanecen acotadas para  $x \rightarrow a^+$ , las condiciones anteriores se satisfacen ya que  $p(a) = 0$  (cero simple en  $x = a$ ).

El razonamiento anterior se extiende fácilmente al caso en que  $q(x)$  posee un polo simple en  $x = a$ , con

$\lim_{x \rightarrow a^+} q(x) = +\infty$  (residuo  $q_{-1} > 0$ ), lo que implica que  $B(x)$  posee un polo de orden 2 en  $x = a$  (con  $B_{-2} = -q_1/c_1 < 0$ ). En tal caso, las raíces de la ecuación indicial son

$$s = \pm \sqrt{-B_{-2}}$$

es decir, *reales* y de signos opuestos. Por lo tanto, sólo una de las soluciones de (14) (la que corresponde a  $s = +\sqrt{-B_{-2}}$ ) permanecerá acotada para  $x \rightarrow a^+$ . La condición de acotación nuevamente descarta una de las soluciones. También se cumplen aquí las ec. (16).

Estas propiedades pueden también demostrarse con el procedimiento de la sec. 6. En términos de  $p(x)$ ,

$$u_2(x) = cu_1(x) \int \frac{dx}{p(x)u_1^2(x)}$$

Si  $u_1(x) \propto (x-a)^s$  para  $x \rightarrow a$ , con  $s \geq 0$ ,  $u_2(x)$  no será acotada para  $x \rightarrow a$  si  $p(x)$  posee un cero simple en  $x = a$ . Se dejan los detalles para el lector.

Puede demostrarse que las propiedades anteriores del conjunto de autofunciones *siguen siendo válidas si  $p(x)$  posee un cero simple en uno de los bordes*, siempre y cuando se exija que la autofunción *permanezca acotada en ese borde*. Si  $p(x)$  posee un cero simple en ambos bordes, entonces dicha condición debe imponerse en ambos bordes.

**8) Ejemplo: Serie de Polinomios de Legendre**  
Retornemos a la ecuación de Legendre, escrita ahora en la forma

$$-((1-x^2)u')' = \lambda u, \quad x \in [-1, 1] \quad (17)$$

Esta ec. puede verse como la ec. de autovalores de un op. de Sturm-Liouville, con  $p(x) = 1-x^2 = (1+x)(1-x)$  y  $q(x) = 0$ . En este caso  $p(x)$  posee un cero simple en  $x = 1$  y  $x = -1$  por lo que imponemos como condición de contorno que  $u(x)$  permanezca *acotada* en ambos bordes ( $x = \pm 1$ ). Como vimos en la clase 9, esto ocurre sólo si  $\lambda = l(l+1)$ , con  $l = 0, 1, \dots$  (lo que determina los autovalores), y en tal caso para la solución con la misma paridad de  $l$ , que es un *Polinomios de Legendre*:

$$u(x) = P_l(x), \quad \lambda = l(l+1), \quad l = 0, 1, \dots$$

los cuales forman pues una base completa ortogonal en  $[-1, 1]$ . Podemos expandir entonces una función en dicho intervalo como

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x), \quad x \in [-1, 1]$$

con (recordar que  $\int_{-1}^1 P_l^2(x) dx = 2/(2l+1)$ )

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx$$

Notemos que las raíces de la ec. indicial en  $x = \pm 1$  son ambas 0. Esto implica que la solución no acotada de (17) tendrá una divergencia *logarítmica* en el extremo.

## 9) Serie de Polinomios asociados de Legendre:

Consideremos ahora

$$-((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2}u = \lambda u, \quad x \in [-1, 1]$$

Puede verse como la ec. de autovalores de un operador de Sturm-Liouville, con  $p(x) = (1-x^2)$  y  $q(x) = m^2/(1-x^2)$ . En este caso  $q(x)$  posee un polo simple en  $x = 1$  y en  $x = -1$ , y es positiva para  $x \in (-1, 1)$ . La condición de contorno a imponer es nuevamente que la autofunción permanezca acotada en  $x = 1$  y  $x = -1$ . Como vimos en la sección 7, esto implica, para  $m > 0$  entero, que  $l = m, m+1, m+2, \dots$ , con  $l$  entero, y en tal caso que  $u(x)$  sea el polinomio generalizado de Legendre:

$$u(x) = P_l^m(x), \quad \lambda = l(l+1), \quad l = m, m+1, m+2, \dots$$

Podemos expandir entonces una función en  $[-1, 1]$  también como

$$f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} c_l P_l^m(x), \quad x \in [-1, 1]$$

con

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^1 f(x) P_l^m(x) dx \\ &= \frac{(-1)^m (2l+1)}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l^{-m}(x) dx \end{aligned}$$

## 10) Serie de Bessel

La ec. de Bessel  $u'' + u'/x + (k^2 - \nu^2/x^2)u = 0$  puede escribirse como

$$-(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu \quad (18)$$

con  $\lambda = k^2$ , que corresponde a una ec. de autovalores de un op. Sturm-Liouville con  $p(x) = x$ ,  $q(x) = \nu/x$  y  $\rho(x) = x$ . Esta ec., con  $x = r$ , surge por ej. al resolver

$$-\Delta w(r, \theta) = \lambda w(r, \theta)$$

con  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  el Laplaciano en coordenadas polares, en una región circular ( $a_0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ ), para soluciones de la forma  $w(r, \theta) = u(r)e^{i\nu\theta}$ . Supondremos  $\nu$  real.

Consideremos primero  $x \in [0, a]$ . Como  $p$  posee un cero simple en  $x = 0$ , la cond. de contorno en  $x = 0$  debe ser  $|u(0)| < \infty$ . En  $x = a$  supondremos la cond. de Dirichlet  $u(a) = 0$ , aunque para otras cond. de contorno locales el procedimiento es similar. La solución general de (18) es

$$u(x) = AJ_\nu(\sqrt{\lambda}x) + BY_\nu(\sqrt{\lambda}x)$$

La cond.  $|u(0)| < \infty$  implica  $B = 0$ , mientras que la cond.  $u(a) = 0$  implica

$$J_\nu(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

o sea,

$$\sqrt{\lambda}a = k_n^\nu, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{con } J_\nu(k_n^\nu) = 0$$

Aquí  $k_n^\nu$  son las raíces de  $J_\nu(x)$ , que forman un conjunto numerable de números reales. Los autovalores son entonces  $\lambda_n = (k_n^\nu/a)^2$  y las autofunciones correspondientes son ortogonales respecto del prod. interno  $(u, v)_x = \int_0^a u(x)v(x)xdx$ :

$$\int_0^a J_\nu(k_n^\nu x/a)J_\nu(k_m^\nu x/a)xdx = \delta_{nm}N_n^2$$

donde

$$N_n^2 = \int_0^a J_\nu^2(k_n^\nu x/a)xdx = \frac{a^2}{2}J_\nu'^2(k_n^\nu) \quad (19)$$

En efecto, mult. (18) por  $-2xu'$  obtenemos  $2[(xu')'xu' + (\lambda x^2 - \nu^2)uu'] = 0$ , de donde  $[(xu')^2 + (\lambda x^2 - \nu^2)u^2]' = 2\lambda xu^2$  y

$$\int u^2(x)xdx = \frac{(xu')^2 + (\lambda x^2 - \nu^2)u^2}{2\lambda}$$

Por lo tanto, si  $u(x) = J_\nu(kx)$ ,

$$\int_0^a J_\nu^2(\sqrt{\lambda}x)xdx = \frac{a^2}{2}[J_\nu'^2(\sqrt{\lambda}a) + (1 - \frac{\nu^2}{a^2\lambda})J_\nu^2(\sqrt{\lambda}a)]$$

que conduce al resultado (19) para  $\lambda = (k_n^\nu/a)^2$ .

El conjunto de autofunciones  $\{J_\nu(k_n^\nu x/a), \quad n = 1, 2, \dots, \}$  es completo en  $[0, a]$  por ser  $L$  autoadjunto con las presentes cond. de contorno. Podemos pues expandir una función  $f$  para  $x \in [0, a]$  que sat. dichas cond. como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_\nu(k_n^\nu x/a)$$

donde remarcamos que la suma es sobre  $n$  y no  $\nu$ , con

$$c_n = \frac{2}{a^2 J_\nu'^2(k_n^\nu)} \int_0^a f(x)J_\nu(k_n^\nu x/a)xdx$$

Por ejemplo, los primeros ceros de  $J_0(x)$  son

$$k_1^0 \approx 2,405 = 0,765\pi, \quad k_2^0 \approx 5,52 = 1,76\pi, \quad k_3^0 \approx 8,65 = 2,75\pi$$

con  $k_n^0 \approx (n - \frac{1}{4})\pi$  para  $n$  grande en virtud de las fórmulas asintóticas para  $J_0(x)$ .

Para una condición de contorno de Neumann en  $x = a$  ( $u'(a) = 0$ ), el tratamiento es similar pero tendremos que utilizar los ceros de  $J_\nu'(x)$ . Se dejan los detalles para el lector.

En el caso de un anillo  $0 < a < x < b$ , con condiciones de contorno de Dirichlet  $u(a) = u(b) = 0$ , la solución general de (18) será

$$u(x) = A[J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + \alpha Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)]$$

Tanto los autovalores  $\lambda_n$  como el coef.  $\alpha_n$  que determina las autofunciones deben determinarse a partir de las ecuaciones  $u(a) = 0$ ,  $u(b) = 0$ . Se dejan también los detalles para el lector.

## Matemáticas Especiales II

### Transformada de Fourier (Resumen)

Consideremos nuevamente la forma compleja del desarrollo en serie de Fourier de una función  $f : [-L, L] \rightarrow \mathfrak{R}$ :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (1.1)$$

donde la suma indica el valor principal  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m$ . Podemos reescribir la serie como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k F(k) e^{ikx} \Delta k, \quad (1.2)$$

donde  $k = \frac{n\pi}{L}$ ,  $\Delta k = \frac{\pi}{L}$  y

$$F(k) = \sqrt{2\pi} c_n \frac{L}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L f(x) e^{ikx} dx \quad (1.3)$$

Consideremos ahora el límite  $L \rightarrow \infty$ . En tal caso,  $\Delta k \rightarrow 0$  y las ec. (1.2)–(1.3) tienden a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (1.4)$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (1.5)$$

asumiendo que ambas integrales convergen, con  $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r$  el valor principal.

La función  $F : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por (1.5) se denomina **Transformada de Fourier** (TF) de la función  $f$  ( $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ ) y la expresión (1.4), que recupera  $f$  a partir de  $F$ , es la “antitransformada” de  $F$ . Constituyen la generalización de la serie de Fourier para funciones  $f$  definidas en  $(-\infty, \infty)$  (y de módulo integrable). Debido a la simetría de las ec. (1.4)–(1.5), son posibles también otras convenciones para definir la TF (puede por ej. omitirse el factor  $1/\sqrt{2\pi}$  en (1.4) y reemplazar el de (1.5) por  $1/(2\pi)$  o viceversa, y también reemplazar  $e^{\pm ikx}$  por  $e^{\mp ikx}$ ). Las ec. (1.4)–(1.5) son válidas para cualquier función  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  continua que satisfaga  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$  y que posea un número finito de máximos y mínimos. Si  $f$  posee una discontinuidad aislada finita en un punto  $x_0$ , la integral en (1.4) converge al punto medio, como ocurre en la serie de Fourier.

Desde el punto de vista físico, la expresión (1.4) se entiende como la expansión de la función  $f(x)$  en términos de funciones armónicas puras  $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$ , de frecuencia angular  $k$  (y período  $2\pi/k$ ), siendo  $F(k)$  el peso (amplitud) de la frecuencia  $k$  en la expansión de  $f$ .

Demostraremos ahora explícitamente la validez de las ec. (1.4)–(1.5) para funciones  $f$  continuas y derivables lateralmente en cualquier punto, que satisfagan  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ . La dem. es muy similar a la efectuada para la serie de Fourier. Las ec. (1.4)–(1.5) implican

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk \right] f(x') dx'$$

de modo que lo que debe demostrarse es que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x-x') \quad (1.6)$$

donde  $\int_{-\infty}^{\infty} dk = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r dk$ . En efecto,  $\frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{ikt} dk = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{irt} - e^{-irt}}{it} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(rt)}{t}$ , con

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(rt)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = 1$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{ik(x-x')} dk \right] f(x') dx' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[r(x-x')]}{\pi(x-x')} f(x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(rt)}{\pi t} [f(x+t) - f(x) + f(x)] dt = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \sin(rt) \frac{f(x+t) - f(x)}{\pi t} dt \end{aligned} \quad (1.7)$$

Para  $r \rightarrow \infty$ , el segundo término en (1.7) se anula por el Lema de Riemann (véase clase de series de Fourier) si  $f$  es una función derivable al menos lateralmente en  $x$  (ya que en tal caso  $(f(x+t) - f(x))/t$  permanece acotado para  $t \rightarrow 0$ ) e integrable en  $(-\infty, \infty)$ . Queda así demostrada la ec. (1.6).

La ec. (1.6) implica también

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{k'}^*(x) \phi_k(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(k-k')} dx = \delta(k - k') \quad (1.8)$$

indicando que las funciones  $\phi_k(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$  son *ortogonales* respecto del producto interno  $(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(x)v(x)dx$  y están “normalizadas” respecto de la variable  $k$ , si interpretamos por esto último precisamente la condición (1.8). Nótese que la convergencia de las integrales (1.6)–(1.8) debe entenderse como distribución (convergencia débil).

### Propiedades básicas de la transformada de Fourier

Se resumen en la siguiente tabla:

	$f(x)$	$F(k)$
0	$f(-x)$	$F(-k)$
1	$f(ax) \ (a \neq 0)$	$F(k/a)/ a $
2	$f(x+b)$	$e^{ikb}F(k)$
3	$f'(x)$	$ikF(k)$
4	$f^{(n)}(x)$	$(ik)^n F(k)$
5	$x^n f(x) \ (n \in \mathbb{N})$	$i^n F^{(n)}(k)$
6	$F(x)$	$f(-k)$
7	$f(x)e^{ibx} \ (b \in \mathfrak{R})$	$F(k-b)$
8	$(f * g)(x)$	$\sqrt{2\pi}F(k)G(k)$
9	$f(x)g(x)$	$(F * G)(k)/\sqrt{2\pi}$

donde  $(f * g)$  denota la *convolución* de  $f$  y  $g$ :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')dx' = (g * f)(x)$$

y  $(F * G)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k-k')G(k')dk' = (G * F)(k)$  la convolución de  $F$  y  $G$ .

Demostraciones:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{-iku/a}}{\sqrt{2\pi}} du = \frac{F(k/a)}{|a|} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x+b) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{-iku}}{\sqrt{2\pi}} e^{ikb} du = e^{ikb} F(k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx &= f(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx = ikF(k) \end{aligned}$$

donde hemos asumido que  $f'(x) \rightarrow 0$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ . La prop. 4 sigue por inducción (asumiendo  $f^{(m)}(\pm\infty) = 0$  si  $m \leq n$ ) y la 5 se obtiene en forma similar (asumiendo  $F^{(m)}(\pm\infty) = 0$  para

$m \leq n$ ). La prop. 6 es consecuencia de las ec. (1.4)–(1.5). La prop. 7 se deja como ejercicio.  
 Prop. 8:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x') \frac{e^{-ik(x-x'+x')}}{\sqrt{2\pi}} dx' dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iku} du \int_{-\infty}^{\infty} g(x') \frac{e^{-ikx'}}{\sqrt{2\pi}} dx' = \sqrt{2\pi} F(k) G(k) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Prop. 9: Se deja como Ejercicio.

### Otras propiedades de la TF:

10) La TF conserva el producto escalar entre funciones (producto interno complejo):

$$\begin{aligned} (g, f) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx F(k) dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G^*(k) F(k) dk = (G, F) \end{aligned}$$

donde  $G$  es la TF de  $g$ . Esto implica en particular que la TF conserva la norma:

$$\|f\|^2 \equiv (f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = (F, F)$$

11) Si  $f$  es real  $\Rightarrow F(-k) = F(k)^*$  (para  $k$  real). Se deduce inmediatamente de la expresión

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \right] \quad (1.10)$$

12) La prop. 0 implica que si  $f$  es par ( $f(-x) = f(x)$ )  $\Rightarrow F(k)$  es par ( $F(-k) = F(k)$ ).  
 A partir de (1.10) vemos también que en tal caso,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx = 0$  y

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$$

siendo  $F$  real si  $f$  es real.

Si  $f$  es impar ( $f(-x) = -f(x)$ )  $\Rightarrow F(k)$  es impar. En tal caso,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx = 0$  y

$$F(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$$

siendo  $F$  imaginario si  $f$  es real.

13) A partir de la def. (1.5) y la prop. 5, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sqrt{2\pi} F(0) \quad (1.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^n dx = \sqrt{2\pi} i^n F^{(n)}(0), \quad (1.12)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Las derivadas de  $F(k)$  en el origen permiten pues evaluar en forma inmediata las integrales (1.11)–(1.12) (ver ejercicios en práctica).

Ejemplos: de TF: ( $H(x)$  denota la fn. de Heaviside y  $a > 0$ ,  $b$  real )

	$f(x)$	$F(k)$
1	$e^{-a x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$
2	$e^{-ax}H(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+ik}$
3	$e^{-x^2/(2a^2)}$	$ae^{-a^2k^2/2}$
4	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}} e^{-a k }$
5	$H(x+a) - H(x-a)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ak)}{k}$
6	$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
7	$e^{ibx}$	$\sqrt{2\pi}\delta(k-b)$
8	$\cos(bx)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\delta(k-b)+\delta(k+b)}{2}$
9	$\sin(bx)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\delta(k-b)-\delta(k+b)}{2i}$
10	$e^{-x^2/(2a^2)}e^{ibx}$	$ae^{-a^2(k-b)^2/2}$

Demostraciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|-ikx} dx = \int_0^{\infty} e^{-x(a+ik)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(a-ik)} dx = \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} = \frac{2a}{a^2+k^2}, \quad a > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}H(x)e^{-ikx} dx = \int_0^{\infty} e^{-x(a+ik)} dx = \frac{1}{a+ik} \quad (1.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ik)^2/2-k^2/2} dx = e^{-k^2/2} \int_{-\infty+ik}^{\infty+ik} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi} e^{-k^2/2}$$

donde  $z = (x + ik)$ . Se ha completado cuadrados en el exponente y utilizado el resultado

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

el cual se obtiene de

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = 2\pi$$

(también hemos utilizado el hecho de que  $e^{-z^2/2}$  es una función analítica de  $z$  que se anula para  $\text{Re}[z] \rightarrow \pm\infty$ , como se verá en las próximas clases). El resultado general 3 (para  $a \neq 1$ ) se obtiene utilizando la prop. 2.

Este ejemplo demuestra que la TF de una gaussiana (de ancho  $a$ ) es también una gaussiana (de ancho  $1/a$ ). Esto posee una importancia fundamental en diversas aplicaciones. Notemos que la norma se conserva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a^2} dx = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2} dk = \sqrt{\pi}a$$

El ej. 4 se obtiene de 1 utilizando la prop. 6, mientras que el ej. 5 sigue de

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H(x+a) - H(x-a)]e^{-ikx} dx = \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ika} - e^{ika}}{-ik} = 2 \frac{\sin(ka)}{k}$$

Los ej. 6 y 7, que deben entenderse como la TF de una distribución (siendo el resultado otra distribución), son consecuencia inmediata de (1.6). El resultado 6 puede también obtenerse de 5 dividiendo a  $f$  y  $F$  por  $2a$  y tomando el límite  $a \rightarrow 0$ , de acuerdo con la relación  $\delta(x) = H'(x)$ . Los ej. 8-9 se derivan de lo anterior en forma inmediata, recordando que  $\cos(ax) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$ ,



$\sin(ax) = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}$ . Implican que la TF de una función  $f(x)$  periódica de período  $2L$  (que puede desarrollarse en serie de Fourier) tendrá pues picos tipo  $\delta$  localizados en  $\pm n\omega$ , con  $\omega = \pi/L$  y  $n$  entero. Finalmente, 10 se deriva inmediatamente de 3 (se deja como ejercicio). De 10 se puede reobtener 7 en el límite  $a \rightarrow +\infty$  (ejercicio).

Es importante destacar que cuanto más esparcida esté  $f(x)$  (por ej.,  $a$  grande en el ej. 3), tanto más concentrada estará  $F(k)$ , y viceversa. Los ej. 6-7 son casos extremos de esta propiedad, la cual esta estrechamente relacionada con el principio de incerteza de la mecánica cuántica.

## Desarrollos de medio rango: Transformadas seno y coseno

Análogamente al caso finito, para un intervalo  $(0, \infty)$  podemos considerar las extensiones par e impar de una cierta función  $f$  definida para  $x \geq 0$ . Si completamos a  $f$  en forma par para  $x < 0$ , obtenemos, teniendo en cuenta la prop. 10,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(k) \cos(kx) dk \quad (1.14)$$

$$F_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(kx) dx \quad (1.15)$$

La ec. (1.15) se denomina transformada coseno de  $f(x)$  y coincide con la TF de  $f$  completada en forma par. La transf. inversa es en este caso idéntica.

Si se completa a  $f$  en forma impar para  $x < 0$ , se obtiene, utilizando nuevam. la prop. 10,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(k) \sin(kx) dk \quad (1.16)$$

$$F_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(kx) dx \quad (1.17)$$

La ec. (1.17) se denomina transformada seno de  $f$ , y satisface  $F_s(k) = iF(k)$ , siendo  $F(k)$  la TF de  $f$  completada en forma impar.

## 2 La transformada discreta de Fourier

Consideremos, en lugar de una función  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , una función definida sólo en un número finito  $n$  de puntos  $x_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , tal que  $f_j = f(x_j)$ . En tal caso es posible definir una **transformada discreta de Fourier**  $F_k$  de la siguiente forma:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-2\pi i j k/n}, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (2.1)$$

Conocidos los  $n$  valores  $F_k$ , los  $n$  valores  $f_j$  pueden recuperarse exactamente mediante la transformación inversa, dada por

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} F_k e^{2\pi i j k/n}, \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (2.2)$$

Esto puede demostrarse fácilmente, reemplazando  $F_k$  por su definición:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j'=1}^{n-1} f_{j'} e^{-2\pi i j' k/n} \right] e^{2\pi i j k/n} = \sum_{j'=0}^{n-1} f_{j'} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k(j-j')} \right] = f_j$$

donde hemos utilizado el resultado

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k(j-j')/n} = \delta_{jj'} = \begin{cases} 1 & j = j' \\ 0 & j \neq j' \end{cases} \quad (2.3)$$

válido para  $j, j'$  enteros. En efecto, si  $j = j'$ ,  $e^{2\pi ik(j-j')/n} = 1$  y  $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ik(j-j')/n} = n$ , mientras que si  $j \neq j'$  (y  $|j - j'| < n$ )

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ik(j-j')/n} = \frac{1 - e^{2\pi i(j-j')}}{1 - e^{2\pi i(j-j')/n}} = 0$$

para  $j - j'$  entero.

Ejercicios:

- 1) Probar que si  $f_j$  es constante ( $f_j = c \forall j$ )  $\Rightarrow F_k = \delta_{k0}c\sqrt{n}$  (o sea,  $F_k = 0$  salvo para  $k = 0$ ).
- 2) Probar que si  $f_j = ce^{i2\pi mj/n}$ , con  $0 \leq m \leq n - 1 \Rightarrow F_k = c\delta_{km}\sqrt{n}$
- 3) Probar que si  $f_j = c\delta_{jm}$  (o sea,  $f_j = 0$  salvo para  $j = m$ , con  $m$  entre 0 y  $n - 1$ )  $\Rightarrow F_k = ce^{-2\pi imk/n}/\sqrt{n}$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$  (o sea,  $|F_k| = |c|/\sqrt{n} \forall k$ ).

### 3 Transformada de Laplace

Para una función  $f$  definida para  $x \geq 0$ , la transformada de Laplace (TL) se define como

$$L_f(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx \quad (3.1)$$

Si  $f(x) < e^{\alpha x}$  para  $x \rightarrow \infty \Rightarrow L_f(p)$  converge para  $\text{Re}[p] > \alpha$ . Supondremos esta condición en lo sucesivo. Notemos que  $L_f(ik) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(F_c(k) - iF_s(k))$  en el caso en que  $L_f(ik)$  existe. Si completamos a  $f$  t.q.  $f(x) = 0$  para  $x < 0$ ,  $L_f(ik) = \sqrt{2\pi}F(k)$ .

La propiedad fundamental de (3.1) es que la TL de las derivadas  $f^{(n)}(x)$  quedan expresadas en términos de  $L_f(p)$  y las derivadas de  $f$  en el punto inicial  $x = 0$ . Integrando por partes,

$$\begin{aligned} L_{f'}(p) &= \int_0^{\infty} e^{-px} f'(x) dx = -f(0) + p \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx \\ &= -f(0) + pL_f(p) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por inducción, obtenemos en forma análoga,

$$\begin{aligned} L_{f^{(n)}}(p) &= \int_0^{\infty} e^{-px} f^{(n)}(x) dx = -f^{(n-1)}(0) + p \int_0^{\infty} e^{-px} f^{(n-1)}(x) dx \\ &= -f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) - \dots - p^{n-1}f(0) + p^n L_f(p) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Otra prop. útil se refiere a la TL de la convolución de funciones  $f$  y  $g$  definidas para argumentos positivos, definida como

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-x')g(x')dx' = (g * f)(x)$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} L_{f*g}(p) &= \int_0^{\infty} \int_0^x f(x-x')g(x')e^{-px} dx' dx = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^x f(x-x')e^{-p(x-x')}g(x')e^{-px'} dx' dx \\ &= \int_0^{\infty} f(u)e^{-pu} du \int_0^{\infty} g(x')e^{-px'} dx' \\ &= L_f(p)L_g(p) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para hallar la transf. inversa, completando a  $f$  en forma nula para  $x < 0$ , y considerando la TF de  $e^{-\alpha x} f(x)$ , con  $\alpha > 0$ , podemos escribir

$$e^{-\alpha x} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_0^{\infty} e^{-ikx'} e^{-\alpha x'} f(x') dx'$$

de donde

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x(\alpha+ik)} dk \int_0^{\infty} e^{-x'(\alpha+ik)} f(x') dx' \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zx} L_f(z) dz
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

con  $z = \alpha + ik$ . El resultado es en principio indep. de la elección de  $\alpha$  si las integrales convergen, es decir, si  $\alpha$  es suficientemente grande. Si es posible cerrar la integral (3.5) con un semicírculo de radio muy grande a la izq. de  $\alpha$ , a lo largo del cual la integral tiende a cero, por el teorema de los residuos obtenemos en tal caso

$$f(x) = \sum_{z_i} \text{Res}[e^{z_i x} L_f(z_i)]$$

donde la suma se extiende sobre *todos* los polos  $z_i$  de  $e^{zx} L_f(z)$ .

El mayor inconveniente de la TL es que la relación inversa requiere el conocimiento de  $L_f(p)$  para valores complejos de  $p$ . Si se dispone tan sólo de una tabla de valores numéricos de  $L_f(p)$  para cierto conjunto finito de valores reales de  $p$  (y no una expresión analítica de  $L_f(p)$ ), como ocurre en algunos problemas prácticos, no es posible recuperar  $f(x)$  con gran precisión (es un típico problema “ill posed”).

Algunas propiedades y ejemplos (en todos los casos  $a > 0$ ):

	$f(x)$	$L_f(p)$
1	$f(ax)$	$L_f(p/a)/a$
2	$f(x+a)$	$e^{pa} L_f(p)$
3	$f'(x)$	$-f(0) + pL_f(p)$
4	$xf(x)$	$-d[L_f(p)]/dp$
5	$(f * g)(x)$	$L_f(p)L_g(p)$
6	$e^{-ax}$	$\frac{1}{a+p}$
7	$\cos(ax)$	$p/(a^2 + p^2)$
8	$\sin(ax)$	$a/(a^2 + p^2)$
9	$H(x-a)$	$e^{-ap}/p$
10	$\delta(x-a)$	$e^{-pa}$

Ejemplo: Hallar  $u(t)$  t.q.

$$u'' + k^2 u = f(t)$$

para  $t > 0$ , con  $u(0)$ ,  $u'(0)$  datos conocidos y  $k \neq 0$ . Mult. la ec. anterior por  $e^{-pt}$  e integrando, obtenemos, utilizando la ec. (3.3),

$$-u'(0) - pu(0) + (p^2 + k^2)L_u(p) = L_f(p)$$

de donde

$$L_u(p) = \frac{u'(0) + pu(0)}{p^2 + k^2} + \frac{1}{p^2 + k^2} L_f(p)$$

Utilizando ahora las prop. 5, 7 y 8 de la tabla anterior, obtenemos

$$u(t) = \frac{1}{k} u'(0) \sin(kt) + u(0) \cos(kt) + \frac{1}{k} \int_0^t \sin[k(t-t')] f(t') dt'$$

que coincide con el conocido resultado para la solución de esta ecuación obtenido mediante la función de Green.

## Matemáticas Especiales II

### Ecuaciones en derivadas parciales. Introducción

Consideremos primero la ecuación lineal de primer orden más simple,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

donde  $u(x, y)$  es una función de dos variables. Es obvio que la solución general de esta ecuación es

$$u(x, y) = f(x)$$

donde  $f$  es una función arbitraria que depende sólo de  $x$ . Así, mientras que el conjunto de soluciones de una ec. dif. lineal ordinaria homogénea de primer orden depende de una constante arbitraria, formando un espacio vectorial de dimensión 1, en el presente caso la solución general depende de una función arbitraria  $f$  de la variable  $x$ , siendo por lo tanto un espacio vectorial de dimensión infinita. La segunda observación es que la solución permanece constante a lo largo de una curva (las rectas verticales  $x = c$ ). Tales curvas se denominan curvas características.

Consideremos ahora la ecuación

$$a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

con  $a_x^2 + a_y^2 \neq 0$ . Podemos reescribirla como  $\vec{a} \cdot \vec{\nabla} u = 0$ , de modo que toda función que varíe sólo a lo largo de una dirección perpendicular a  $\vec{a}$  (es decir, dependa de la coordenada "perpendicular") será solución. Si por ej.  $a_y \neq 0$ , con  $a_x$  y  $a_y$  constantes, la solución gral. de (1) puede escribirse como

$$u(x, y) = f\left(x - \frac{a_x}{a_y}y\right),$$

con  $f$  derivable, como es fácil verificar:  $\vec{a} \cdot \vec{\nabla} u = (a_x - a_y \frac{a_x}{a_y})f'(x - \frac{a_x}{a_y}y) = 0$ . En este caso la sol. es constante a lo largo de las rectas  $x - \frac{a_x}{a_y}y = c$ , o sea,  $y = c' + \frac{a_y}{a_x}x$ , que son paralelas al vector  $\vec{a}$ .

Podemos obtener este resultado en forma más sistemática. Notemos primero que si se efectúa un cambio de variables  $(x, y) \rightarrow (x', y')$ , con

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y)$$

siendo la transformación invertible, tenemos  $\frac{\partial}{\partial x} = F_x \frac{\partial}{\partial x'} + G_x \frac{\partial}{\partial y'}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} = F_y \frac{\partial}{\partial x'} + G_y \frac{\partial}{\partial y'}$ , donde el subíndice indica derivada parcial respecto de la variable respectiva. Esto puede escribirse en forma matricial como

$$D = WD'$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} F_x & G_x \\ F_y & G_y \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \end{pmatrix}$$

con  $\text{Det}[W] \neq 0$ .

La ec. (1) puede escribirse en forma matricial como  $(a_x, a_y)Du = 0$ . Planteando la transformación lineal

$$x' = x + \alpha y, \quad y' = x + \beta y, \quad \alpha \neq \beta \quad (2)$$

se obtiene  $D = WD'$ , con

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

y la ec. (1) se transforma en  $(a'_x, a'_y)D'u = 0$ , o sea,

$$a'_x \frac{\partial u}{\partial x'} + a'_y \frac{\partial u}{\partial y'} = 0$$

con

$$(a'_x, a'_y) = (a_x, a_y)W = (a_x + \alpha a_y, a_x + \beta a_y)$$

Anulando por ejemplo  $a'_x$ , tenemos  $a_x + \alpha a_y = 0$ , o sea  $\alpha = -a_x/a_y$ . Eligiendo  $\beta \neq \alpha$ , se obtiene  $a'_y \neq 0$  y la ec. se transforma finalmente en

$$\frac{\partial u}{\partial y'} = 0$$

cuya solución es

$$u = f(x') = f\left(x - \frac{a_x}{a_y}y\right)$$

Hemos supuesto  $a_x$  y  $a_y$  constantes. Si  $a_x$  y  $a_y$  son funciones de  $(x, y)$ , podemos emplear un procedimiento similar pero utilizando una transformación general que cumpla por ej. con la condición  $a'_x = a_x F_x + a_y F_y = 0$  y  $a'_y \neq 0$ . La curva característica será entonces  $x' = c$ , o sea  $F(x, y) = c$ .

**Ecuación lineal homogénea de 2º orden.** Consideremos ahora la ecuación de segundo orden

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Si  $a = c = 0$  y  $b \neq 0$ , se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

o sea  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$ . Entonces  $\frac{\partial u}{\partial y} = h(y)$ , de donde se obtiene la sol. gral.

$$u(x, y) = f(x) + g(y)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones de una variable derivables arbitrarias. La solución general se expresa entonces en términos de *dos* funciones arbitrarias.

Volviendo al caso general, para  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes la ec. (4) puede escribirse en forma matricial como

$$D^t A D u = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

con  $D^t = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ . Asumiremos en lo sucesivo  $c \neq 0$ . Efectuando la transf. lineal (2), obtenemos, en términos de las nuevas variables, la ec.  $D'^t A' D' u = 0$ , o sea,

$$a' \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + 2b' \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + c' \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = 0$$

con

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = W^t A W$$

y  $W$  dado por (3), es decir,

$$a' = a + 2b\alpha + c\alpha^2, \quad b' = a + b(\alpha + \beta) + c\alpha\beta, \quad c' = a + 2b\beta + c\beta^2$$

Podemos anular ahora tanto  $a'$  como  $c'$  si elegimos  $\alpha$  y  $\beta$  como las dos raíces de la ecuación  $a + 2bx + cx^2 = 0$ :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}$$

Si  $b^2 - ac \neq 0$  (o sea,  $\text{Det}[A] \neq 0$ ),  $\alpha \neq \beta$  y en tal caso

$$b' = 2(a - b^2/c) \neq 0$$

La ecuación se reduce entonces a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} = 0$$

cuya solución general es

$$u(x, y) = f(x') + g(y')$$

1) **Caso hiperbólico:**  $b^2 - ac > 0$  ( $\text{Det}[A] < 0$ ). Las dos raíces  $\alpha, \beta$  son reales y distintas. La solución general es entonces de la forma

$$u(x, y) = f(x + \alpha y) + g(x + \beta y)$$

y posee *dos rectas características*:  $x + \alpha y = c$ , y  $x + \beta y = c'$ , donde  $f$  y  $g$  son respectivamente constantes. Un nuevo cambio

$$s = x' + y', \quad t = x' - y' \quad (5)$$

lleva la ec. hiperbólica a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

El ejemplo típico de ec. hiperbólica es la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

( $b = 0, a = 1, c = -1/v^2$ ), en cuyo caso  $\alpha, \beta = \pm v$  y la solución general es entonces

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

es decir, un pulso descrito por  $f$  que se propaga hacia la derecha con velocidad  $v$  más uno descrito por  $g$  que se propaga hacia la izquierda con la misma velocidad.

2) **Caso elíptico:**  $b^2 - ac < 0$  ( $\text{Det}[A] > 0$ ). Las dos raíces son complejas conjugadas, por lo que  $y' = (x')^*$ . Podemos escribir entonces la solución como

$$u(x, y) = f(z) + g(z^*), \quad z = x' = x - \frac{b}{c}y + \frac{i}{c}\sqrt{ac - b^2}y$$

Esto significa que la solución es una suma de una función analítica  $f(z)$  (definida, por ejemplo, a través de una serie de potencias), y una función antianalítica  $g(z^*)$ . El ejemplo típico por excelencia es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

( $a = c = 1, b = 0$ ), cuya solución general es

$$u(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy), \quad z = x + iy$$

Esto está de acuerdo con el conocido resultado de que las partes real e imaginaria de una función analítica satisfacen la ec. de Laplace. Notemos también que mediante la transformación real

$$s = \frac{x' + y'}{2} = x - \frac{b}{c}y, \quad t = \frac{x' - y'}{2i} = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{c}y$$

es posible llevar la ec. elíptica a la forma de Laplace,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

3) **Caso parabólico:**  $b^2 - ac = 0$  ( $\text{Det}[A] = 0$ ). Aquí existe una sola raíz, por lo que tomamos, si  $b \neq 0$  (en cuyo caso  $a = -b^2/c \neq 0$ )  $\alpha = -b/c, \beta = 0$ . Esto conduce a  $c' = a$  y  $b' = a' = a - b^2/c = 0$ , por lo que se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = 0$$

cuya solución general

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(x') + y'g(x') = f(x - \frac{b}{c}y) + yg(x - \frac{b}{c}y) \\ &= f(x - \frac{b}{c}y) + yh(x - \frac{b}{c}y) \end{aligned}$$

Si  $b = 0$  y  $c \neq 0 \Rightarrow a = 0$  y podemos tomar  $x' = x, y' = y$  en las expresiones anteriores. El ejemplo típico es la ecuación de difusión, pero esta contiene además un término de primer orden (se discutirá más adelante). Notemos que en este caso hay una sola curva característica:  $x - \frac{b}{c}y = c$ .

### Simetrías

Destaquemos que la ec. de Laplace (7) es obviamente **invariante frente a rotaciones**:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

ya que en tal caso  $W = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , con  $W^t = W^{-1}$  y entonces  $A' = W^t A W = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Esta propiedad se extiende obviamente a la ecuación de Laplace en  $n$  dimensiones.

Análogamente, la ec. de ondas (6) es claramente **invariante frente a transformaciones de Lorentz** (boosts)

$$x' = x \cosh \theta + vt \sinh \theta, \quad t' = (x/v) \sinh \theta + t \cosh \theta$$

ya que en tal caso  $W = \begin{pmatrix} \cosh \theta & v^{-1} \sinh \theta \\ v \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$   
y  $A' = W^t A W = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -v^{-2} \end{pmatrix}$ .

Ambas ecuaciones son además obviamente invariante frente a traslaciones  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$  (o  $t' = t + b$ ).

**Clasificación general.** La clasificación de la ec. (3) en hiperbólica, elíptica y parabólica es totalmente análoga a la clasificación de secciones cónicas o ecuaciones cuadráticas  $(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ . La matriz  $A$  es simétrica y por lo tanto es siempre diagonalizable por medio de una transformación unitaria real: Existe  $W$ , con  $W^{-1} = W^t$  tal que  $A' = W^t A W$  es *diagonal*, es decir,  $b' = 0$ . En tal caso, la transformación

$$x' = W_{11}x + W_{21}y, \quad y' = W_{12}x + W_{22}y$$

lleva la ec. (5) a la forma diagonal

$$a' \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + b' \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = 0$$

donde  $a'$ ,  $c'$  son los autovalores de  $A$ , que son siempre reales:

$$\frac{a'}{c'} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$$

*Caso hiperbólico:* Corresponde a autovalores *no nulos de signos opuestos*:  $\text{Det}(A) = a'c' = ac - b^2 < 0$

*Caso elíptico:* Corresponde a autovalores no nulos del

*mismo signo*:  $\text{Det}(A) = a'c' > 0$ .

*Caso parabólico:* Corresponde a un autovalor *nulo*:  $\text{Det}(A) = a'c' = 0$ .

El caso general de  $n$  variables se clasifica de igual manera. La ec. de segundo orden

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

con  $A_{ij} = A_{ji}$ , puede escribirse en forma matricial como

$$D^t A D = 0$$

con la extensión de la notación anterior. La ecuación se dice de tipo elíptico si los autovalores de  $A$  son todos no nulos y del mismo signo, hiperbólico si son no nulos y todos del mismo signo excepto uno, metahiperbólico en los demás casos cuando son todos no nulos, y parabólico cuando existen autovalores nulos.

**Términos de primer orden** Consideremos finalmente la ec. general lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

Puede escribirse en forma matricial simetrizada como

$$D^t A D u + \frac{1}{2}(B^t D + D^t B)u + fu = 0$$

con  $B = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ ,  $B^t = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$ . Si  $\text{Det}[A] \neq 0$  (casos hiperbólico o elíptico), podemos reescribirla en la forma

$$(D^t - C^t)A(D - C)u + f'u = 0$$

con  $C = -\frac{1}{2}A^{-1}B = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$ ,  $f' = f - C^t A C$ . En tal caso, el reemplazo

$$u(x, y) = e^{c_x x + c_y y} w(x, y)$$

conduce, dado que  $(D - C)u = e^{c_x x + c_y y} D w$  y  $(D^t - C^t)e^{c_x x + c_y y} A D w = e^{c_x x + c_y y} D^t A D w$ , a

$$D^t A D w + f'w = 0$$

es decir, a una ecuación *sin* términos en derivadas primeras, para  $w$ . Esto no es siempre posible en el caso parabólico.

El mismo tratamiento puede aplicarse al caso  $n$ -dimensional.

## Matemáticas Especiales II

### Ondas en una dimension (resumen)

Recordemos que para una cuerda tensa, la ec. que describe la propagación de ondas  $u(x, t)$  de amplitud suficientemente pequeña es

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \quad (1)$$

donde los subíndices indican derivadas parciales y  $v = \sqrt{T/\rho}$  es la velocidad de propagación, con  $\rho$  la densidad lineal de masa (constante) y  $T$  la tensión. La energía de un segmento de cuerda es

$$E_{ab} = \frac{\rho}{2} \int_a^b (u_t^2 + v^2 u_x^2) dx$$

donde el primer término representa la energía cinética por unidad de longitud y el segundo la energía potencial elástica. Su derivada temporal es

$$\begin{aligned} \frac{dE_{ab}}{dt} &= \rho \int_a^b (u_t u_{tt} + v^2 u_x u_{xt}) dx \\ &= \rho \int_a^b [u_t (u_{tt} - v^2 u_{xx})] dx + \rho v^2 u_x u_t \Big|_a^b \end{aligned}$$

donde hemos efectuado una integración por partes. El primer término se anula si  $u(x, t)$  es solución de la ec. de ondas (homogénea) mientras que el segundo término representa el flujo de energía por unidad de tiempo (potencia) a través de los bordes del segmento. El mismo es nulo si  $u(x, t) = 0 \forall t$  en los bordes y también si  $u_x(x, t) = 0 \forall t$  en los mismos.

Esto permite demostrar, en particular, que la solución de la ec. de ondas en una región  $x_1 \leq x \leq x_2$  para una determinada condición inicial del tipo  $u(x, 0) = \phi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ , y de contorno del tipo  $u(x_i, t) = f_i(t)$  (o bien  $u_x(x_i, t) = f_i(t)$ ) es *única*. En efecto, la diferencia  $w = u_1 - u_2$  entre dos posibles soluciones del mismo problema debe anularse inicialmente ( $w(x, 0) = 0$ ,  $w_t(x, 0) = 0$ ) y en los bordes satisface  $w(x_i, t) = 0$  (o bien  $w_x(x_i, t) = 0$ ), por lo que su energía  $E_{x_1 x_2}$  es constante e igual a su valor inicial, que es nulo. Esto implica  $w(x, t)$  constante, es decir  $w(x, t) = 0$  en virtud de las condiciones de contorno e iniciales que satisface.

Mencionemos también que la ecuación de ondas (1) puede obtenerse a partir del Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (u_t^2 - v^2 u_x^2) dx$$

Las correspondientes ecuaciones de movimiento  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} = 0$  conducen inmediatamente a  $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$ .

Hemos visto también que la solución general de (0) (que corresponde a una ec. hiperbólica) es

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (1)$$

lo que representa una “perturbación”  $f(x - vt)$  propagándose hacia la derecha con velocidad  $v$  y una pert.  $g(x + vt)$  propagándose hacia la izquierda con velocidad  $-v$ . El primer término es constante a lo largo de las rectas características  $x - vt = c$ , y el segundo a lo largo de  $x + vt = c$ .

**Solución general para la cuerda infinita:** Dadas las condiciones iniciales (elong. y vel. inicial de la cuerda)

$$u(x, 0) = \phi(x) = f(x) + g(x)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = v[g'(x) - f'(x)]$$

podemos determinar las funciones  $f$  y  $g$  como

$$f(x) = \frac{1}{2} [\phi(x) - \Psi(x)/v]$$

$$g(x) = \frac{1}{2} [\phi(x) + \Psi(x)/v]$$

donde  $\Psi(x) = \int_{x_0}^x \psi(x') dx'$  es una primitiva de  $\psi(x)$ . La solución estará dada entonces por (notando que  $\Psi(x + vt) - \Psi(x - vt) = \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x') dx'$ )

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x - vt) + \phi(x + vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x') dx' \quad (2)$$

(Solución de D'Alembert). La forma inicial  $\phi(x)$  se separa pues en dos pulsos  $\frac{1}{2} \phi(x \pm vt)$  que viajan en sentidos contrarios, mientras que la velocidad inicial origina dos pulsos de distinto signo  $\pm \frac{1}{2v} \Psi(x \pm vt)$ .

Podemos escribir la solución como

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [K_t(x - x', t) \phi(x') + K(x - x', t) \psi(x')] dx'$$

donde

$$K(x - x', t) = \frac{1}{2v} [H(x - x' + vt) - H(x - x' - vt)]$$

es la solución de la ec. homogénea para la condición inicial  $u(x, 0) = 0$  y  $u_t(x, 0) = \delta(x - x')$ .  $K$  se denomina a veces función respuesta, y depende, en el caso de una cuerda infinita, sólo de la distancia  $|x - x'|$ , debido a la invariancia traslacional. Para  $t > 0$ ,  $K(x, t) = 1/(2v)$  en el cono del futuro (la región  $|x| \leq vt$ ), anulándose fuera del mismo, mientras que para  $t < 0$ ,  $K(x, t) = -1/(2v)$  en el cono del pasado ( $|x| \leq -vt$ ), anulándose también fuera del mismo (recordar diagramas hechos en clase). Para  $t > 0$ ,  $K(x - x', t)$  es por lo tanto no nula (e igual a  $1/(2v)$ ) sólo en el intervalo  $|x - x'| < vt$ , mientras que  $K_t(x - x', t) = (\delta(x - x' + vt) + \delta(x - x' - vt))/2$ . Para  $t > 0$ , los datos iniciales que se encuentran fuera del cono del pasado del punto  $(x, t)$  no afectan pues el valor de  $u(x, t)$ . Notemos también que la solución para  $u(x, 0) = \phi(x)$  y  $u_t(x, 0) = 0$  es la derivada temporal de la solución para  $u(x, 0) = 0$  y  $u_t(x, 0) = \phi(x)$ , lo que puede verificarse directamente.

Consideremos ahora la ec. inhomogénea

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(x, t) \quad (3)$$

donde  $f(x, t) = F(x, t)/\rho$ , siendo  $F(x, t)$  la fuerza aplicada por unidad de longitud. En tal caso, tenemos (asumiendo que  $u_x$  y  $u_t$  se anulan para  $x \rightarrow \pm\infty$ )  $dE/dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_t F(x, t) dx$ , donde la integral representa la potencia aplicada.

La solución de (3) puede obtenerse por distintos métodos. Consideraremos aquí únicamente el método basado en la función de Green. La *función de Green causal* la definimos como

$$G(x, t) = K(x, t)H(t)$$

donde  $H(t)$  es la función de Heaviside. Puede verificar el lector que  $G(x - x', t - t')$  satisface la ecuación

$$G_{tt}(x - x', t - t') - v^2 G_{xx}(x - x', t - t') = \delta(t - t')\delta(x - x')$$

dado que  $K_{tt} - v^2 K_{xx} = 0$  y  $K(x, t)\delta(t) = K(x, 0)\delta(t) = 0$ .  $G(x - x', t - t')$  representa pues la respuesta del sistema a una fuerza impulsiva en el punto  $x'$  y en el instante  $t'$ , estando el sistema en reposo para  $t < t'$ . Depende sólo de  $|x - x'|$  por la invariancia traslacional. Como función de  $x, t$ , es por lo tanto no nula (e igual a  $1/(2v)$ ) sólo en el cono del futuro del punto  $(x', t')$  ( $|x - x'| \leq v(t - t')$ ), mientras que como función de  $x', t'$  es no nula sólo en el cono del pasado del punto  $(x, t)$  ( $|x' - x| \leq v(t - t')$ ) (recordar esquemas hechos en clase). La solución de la ec. inhomogénea (3), asumiendo que el sistema está en reposo para  $t = -\infty$  y teniendo en cuenta la linealidad de la ecuación y el hecho de que podemos descomponer  $f(x, t)$  como una integral de fuerzas impulsivas ( $f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', t')\delta(x - x')\delta(t - t')dx'dt'$ ), es

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', t - t')f(x', t')dx'dt'$$

donde el integrando es, por su puesto, no nulo sólo en el cono del pasado del punto  $(x, t)$  (se sugiere al lector que verifique, utilizando la linealidad de la ecuación, que efectivamente  $u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(x, t)$ ).

La solución general a la ecuación

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(x, t)$$

con  $f(x, t) = 0$  para  $t < 0$  y las condiciones iniciales  $u(x, 0) = \phi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ , puede entonces escribirse, para  $t > 0$ , como

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [G_t(x - x', t)\phi(x') + G(x - x', t)\psi(x')]dx' + \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', t - t')f(x', t')dx'dt' \quad (1)$$

donde hemos utilizado el principio de superposición, derivado de la linealidad de la ecuación dif. Como ejemplo simple, si  $f(x, t) = -cH(t)$  (campo constante para  $t > 0$ ) y  $\phi(x) = 0$ ,  $\psi(x) = 0$ , se obtiene, para  $t > 0$ ,

$$u(x, t) = -\frac{1}{2v}(2vt)t/2 = -vt^2/2$$

lo que corresponde a una aceleración constante.

**Cuerda semi-infinita:** Consideremos ahora una cuerda con origen en  $x = 0$ . Supondremos primero que la cuerda se encuentra fija en ese extremo, lo que implica la *condición de contorno*  $u(0, t) = 0 \forall t$ . Consideremos primero la ec. homogénea ( $f(x, t) = 0$ ) con condiciones iniciales  $u(x, 0) = \phi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ , donde  $\phi$  y  $\psi$  están definidas para  $x \geq 0$ . Podemos simular esta condición de contorno en una cuerda *infinita* extendiendo las condiciones iniciales en forma *impar* respecto de  $x = 0$ , es decir,

$$\phi(-x) = -\phi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x)$$

ya que en tal caso, la solución (2) satisface

$$u(0, t) = \frac{1}{2}[\phi(vt) + \phi(-vt)] + \frac{1}{2v} \int_{-vt}^{vt} \psi(x')dx' = 0$$

La consecuencia física inmediata es que los pulsos se reflejan en el origen *con inversión de signo*, ya que el pulso que se propaga hacia la izquierda se encuentra, al llegar al origen, con el pulso "virtual" que proviene de  $x < 0$  y que tiene el signo opuesto, el cual luego continua propagándose hacia la derecha en el sector "real". La función respuesta correspondiente, definida para  $x \geq 0$ ,  $x' \geq 0$ , es

$$K_s(x, x', t) = K(x - x', t) - K(x + x', t)$$

y satisface

$$K_{s_{tt}}(x, x', t) - v^2 K_{s_{xx}}(x, x', t) = 0$$

$$K_s(x, x', 0) = 0, \quad K_{s_t}(x, x', 0) = \delta(x - x'), \quad K(0, x', t) = 0$$

representando la solución de la ec. homogénea con las condiciones iniciales  $\phi(x) = 0$ ,  $\psi(x) = \delta(x - x')$ , que satisface la condición de contorno ( $K(0, x', t) = 0$ ). Esta no es otra cosa que la solución de la ec. homogénea para la cuerda infinita con las condiciones iniciales  $\phi(x) = 0$  y  $\psi(x) = \delta(x - x') - \delta(x + x')$ . Notemos que  $K_s(x, x', t)$  *no es más* función de  $|x - x'|$ , ya que se ha quebrado la invariancia traslacional. La solución final puede escribirse como

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [K_{s_t}(x, x', t)\phi(x') + K_s(x, x', t)\psi(x')]dx' = \frac{1}{2}[\phi(x - vt) + \phi(x + vt)] + \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x')dx' \quad x \geq vt = \frac{1}{2}[-\phi(vt - x) + \phi(x + vt)] + \int_{vt-x}^{x+vt} \psi(x')dx' \quad x < vt$$

Del mismo modo, la solución de la ec. inhomogénea  $u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(x, t)$  puede hallarse extendiendo  $f(x, t)$  en forma impar para  $x < 0$  ( $f(-x, t) = -f(x, t)$ ) y utilizando entonces la solución para la cuerda infinita:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', t - t')f(x', t')dx'dt' = \int_0^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} G_s(x, x', t - t')f(x', t')dt'$$



con

$$G_s(x, x', t) = K_s(x, x', t)H(t) = G(x - x', t) - G(x + x', t)$$

la función de Green causal para la cuerda semi-infinita, que satisface (para  $x > 0$ ,  $x' > 0$ )

$$G_{s_{tt}}(x, x', t - t') - v^2 G_{s_{xx}}(x, x', t - t') = \delta(x - x')\delta(t - t'),$$

con la condición de contorno  $G_s(0, x', t - t') = 0$  y la condición inicial  $G_s(x, x', t - t') = 0$  para  $t < t'$ . Es fácil verificar entonces que  $u(x, t)$  es la solución particular de la ecuación inhomogénea que satisface  $u(x, t) = 0$  para  $t = -\infty$ , con  $u(0, t) = 0 \forall t$ . (Recordar gráficos hechos en clase).

Finalmente, consideremos el problema con condiciones de contorno *inhomogéneas*

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0, \quad u(0, t) = g(t)$$

Supondremos  $u(x, t) = 0$ .  $u_t(x, 0) = 0$  para  $t \rightarrow -\infty$ , de modo que la elongación se origine sólo por la condición de contorno. Es fácil ver que la solución, que tiene que ser de la forma (1), es sencillamente

$$u(x, t) = g(t - x/v)$$

ya que satisface  $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$  y la condición de contorno. Las excitaciones en  $x = 0$  directamente se propagan hacia la derecha con velocidad  $v$ . Puede escribirse la solución también en términos de  $G_s$  como

$$u(x, t) = v^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_{s_{x'}}(x, x', t - t')|_{x'=0} g(t') dt'$$

ya que  $G_{s_{x'}}(x, x', t)|_{x'=0} = v^{-1} \delta(x - vt)H(t)$  ( $x > 0$ ).

Debido a la linealidad, la solución general a la ecuación

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(x, t)$$

con las condiciones iniciales  $u(x, 0) = \phi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ , y la condición de contorno  $u(0, t) = g(t)$ , suponiendo que tanto  $f$  como  $g$  se anulan para  $t < 0$ , puede escribirse como

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [G_{s_t}(x, x', t)\phi(x') + G_s(x, x', t)\psi(x')] dx' + \int_0^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dt' G_s(x, x', t - t') f(x', t') + g(t - x/v)$$

Para el caso de la cuerda con el extremo *libre* ( $u_x(0, t) = 0$ , lo que implica que no existen fuerzas verticales en  $x = 0$ ) puede procederse en forma análoga, completando las condiciones iniciales (y la inhomogeneidad si la hubiese) en forma *par* respecto de  $x = 0$  ( $\phi(-x) = \phi(x)$ ,  $\psi(-x) = \psi(x)$ ). En tal caso, la sol. (2) implica

$$u_x(x, 0) = \frac{1}{2}[\phi'(vt) + \phi'(-vt)] + \frac{1}{2v}[\psi(vt) - \psi(-vt)] = 0$$

La consecuencia física es la reflexión de los pulsos en el origen sin cambio de signo. La función respuesta correspondiente es

$$K_c(x, x', t) = K(x - x', t) + K(x + x', t)$$

y la función de Green es

$$G_c(x, x', t) = K_c(x, x', t)H(t) = G(x - x', t) + G(x + x', t)$$

Se dejan los detalles restantes para el lector.

### Cuerda Finita: Resolución por Separación de Variables

Consideremos nuevamente la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

Planteando una solución *particular* del tipo

$$u(x, t) = T(t)X(x)$$

se obtiene  $T''(t)X(x) = v^2 X''(x)T(t)$ , es decir,

$$\frac{T''(t)}{v^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2$$

donde  $k$  debe ser constante pues el primer y segundo miembro dependen únicamente de  $t$  y  $x$  respectivamente. Se obtienen así las ecuaciones

$$X'' = -k^2 X, \quad (3)$$

$$T'' = -(vk)^2 T \quad (4)$$

cuya solución general es

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

$$T(t) = a \cos(vkt) + b \sin(vkt)$$

si  $k \neq 0$  y

$$X(x) = A + Bx, \quad T(t) = a + bt$$

si  $k = 0$ . La solución para  $k \neq 0$  puede escribirse como

$$u(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)][a \cos(vkt) + b \sin(vkt)] = \frac{1}{2}[\cos(kx - vkt)(Aa + Bb) + \cos(kx + vkt)(Aa - Bb) + \sin(kx - vkt)(Ba - Ab) + \sin(kx + vkt)(Ba + Aa)]$$

verificándose que es de la forma  $f(x - vt) + g(x + vt)$ . Lo mismo ocurre para  $k = 0$  ( $x = \frac{1}{2}((x + vt) + (x - vt))$ ,  $t = \frac{1}{2}((x + vt) - (x - vt))/v$ ).

**Cuerda finita con extremos fijos.** Consideremos ahora una cuerda *finita* de longitud  $L$ . Si los extremos están fijos, tenemos la condición de contorno

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (5)$$

En tal caso  $A = 0$  y se obtiene la ecuación

$$B \sin(kL) = 0$$

de donde, si  $B \neq 0$ ,

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Esto determina que  $k$  es efectivamente *real* (no hay solución para  $k$  complejo). Los valores de  $k$  son precisamente los *autovalores* del operador de Sturm Liouville  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  con la condición de contorno (5), y

$$X(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

son las correspondientes autofunciones, que recordemos son ortogonales ( $\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$ ). Representan los modos normales de vibración con la condición de contorno (5). Posee  $n - 1$  nodos  $x_m = \frac{m}{n}L$ ,  $m = 1, \dots, n - 1$ , en los que  $X(x_m) = 0$  (recordar gráficas vistas en clase).

La solución particular producto es pues de la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) \right] \quad (6) \\ &= A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t - \gamma\right), \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{aligned}$$

con  $\tan \gamma = b_n/a_n$ , que representa una onda *estacionaria*. Es la superposición de ondas sinusoidales de igual amplitud que se propagan en sentidos opuestos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \{ a_n [\sin[k_n(x - vt)] + \sin[k_n(x + vt)]] \\ &\quad + b_n [\cos[k_n(x - vt)] - \cos[k_n(x + vt)]] \} \end{aligned}$$

con  $k_n = n\pi/L$ .

La solución *general* de (2) en este caso es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) \right] \quad (7)$$

En efecto, si  $u(x, 0) = \phi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (8) \end{aligned}$$

que representan el desarrollo de medio rango en serie de senos de  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{n\pi v} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned}$$

Notemos que la solución general (7) *NO* es de la forma  $X(x)T(t)$ , sino una suma de soluciones producto.

*Función respuesta.* La función respuesta  $K(x, x', t)$  es la solución para las condiciones iniciales  $\phi(x) = 0$ ,  $\psi(x) = \delta(x - x')$ . Se obtiene en tal caso,

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{n\pi v} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)$$

de donde

$$K(x, x', t) = \frac{2}{n\pi v} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)$$

La solución anterior para  $u(x, 0) = \phi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  puede entonces escribirse como

$$u(x, t) = \int_0^L K_t(x, x', t) \phi(x') dx' + \int_0^L K(x, x', t) \psi(x') dx' \quad (9)$$

en forma similar al caso de la cuerda infinita. No obstante,  $K$  es ahora función de  $x$  y  $x'$  separadamente, y no de  $x - x'$ , ya que se ha perdido la invariancia traslacional. Sin embargo, sigue cumpliéndose que  $K(x, x', t) = K(x', x, t)$ .

**Cuerda finita con extremos libres.** En este caso la condición de contorno es

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \quad (10)$$

que implica  $B = 0$  y la ecuación

$$A \sin(kL) = 0$$

de donde

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esto determina que  $k$  es efectivamente *real* (no hay solución para  $k$  complejo). Estos valores de  $k$  son los *autovalores* del operador de Sturm Liouville  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  con la condición de contorno (10), y

$$X(x) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

son las correspondientes autofunciones. Poseen  $n$  nodos  $x_m = (\frac{1}{2} + m)L/n$ ,  $m = 0, \dots, n - 1$ , en los que  $X(x_m) = 0$  (recordar gráficas). La solución particular para  $n \neq 0$  es pues

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \{ a_n [\cos[k_n(x - vt)] + \cos[k_n(x + vt)]] \\ &\quad + b_n [\sin[k_n(x + vt)] - \sin[k_n(x - vt)]] \} \end{aligned}$$

con  $k_n = n\pi/L$ . Si  $n = 0$ ,

$$u(x, t) = a + bt$$

La solución *general* es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) \right]$$

Si  $u(x, 0) = \phi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ , entonces

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\end{aligned}\quad (11)$$

que representan el desarrollo de medio rango en serie de cosenos de  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{n\pi v} \int_0^L \psi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad b_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) dx\end{aligned}$$

*Función respuesta.* La función respuesta  $K(x, x', t)$  se obtiene para  $\phi(x) = 0$ ,  $\psi(x) = \delta(x - x')$ :

$$a_n = 0, \quad b_0 = \frac{2}{L}, \quad b_n = \frac{2}{n\pi v} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)$$

de donde

$$K(x, x', t) = \frac{t}{L} + \frac{2}{n\pi v} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)$$

La solución anterior para  $u(x, 0) = \phi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  puede nuevamente escribirse como (9).

### Función de Green causal

La solución de la ec. inhomogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (12)$$

asumiendo  $u(x, t)$  en reposo antes de la acción de la fuerza, puede expresarse como

$$u(x, t) = \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t - t') f(x', t') dt' \quad (13)$$

donde

$$G(x, x', t) = K(x, x', t)H(t)$$

es la función de Green causal. Podemos llegar a este resultado directamente, notando que  $G$  satisface la ecuación

$$G_{tt}(x, x', t) - v^2 G_{xx}(x, x', t) = \delta(x - x')\delta(t)$$

para  $x, x' \in (0, L)$ , conjuntamente con la cond. de contorno respectiva ( $G(0, x', t) = G(L, x', t) = 0$  para una cuerda finita con extremos fijos).

El resultado (13) puede ser también obtenido expandiendo  $f(x, t)$  y  $u(x, t)$  en serie de Fourier respecto de  $x$ . En el caso con extremos fijos,

$$\begin{aligned}f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\end{aligned}\quad (14)$$

con

$$\begin{aligned}f_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \\ c_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx\end{aligned}$$

Obtenemos también

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Además, si  $u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ , entonces

$$\begin{aligned}b_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L u_{xx}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left\{ u_x(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_0^L - \frac{n\pi}{L} \int_0^L u_x(x, t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right\} \\ &= \frac{2}{L} \left\{ -\frac{n\pi}{L} u(x, t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_0^L - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right\} \\ &= \frac{2n\pi}{L^2} [u(0, t) - (-1)^n u(L, t)] - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c_n(t)\end{aligned}\quad (15)$$

Por lo tanto, si  $u(x, t)$  satisface la cond. de contorno homogénea  $u(x, 0) = u(L, t) = 0 \Rightarrow b_n(t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c_n(t)$ , tal como se obtendría al derivar directam. el desarrollo (14).

Reemplazando estos resultados en (12) se obtiene finalmente una ec. dif. ordinaria para  $c_n(t)$ ,

$$\frac{d^2 c_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 c_n = f_n(t)$$

cuya solución es (recordar que la función de Green para esta ec. es  $g(t) = \frac{1}{k} \sin(kt)H(t)$ , con  $k = \frac{n\pi v}{L}$ , que satisface  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 1$ )

$$\begin{aligned}c_n(t) &= \frac{L}{n\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left[\frac{n\pi v}{L}(t - t')\right] H(t - t') f_n(t') dt' \\ &= \frac{2}{n\pi v} \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sin\left[\frac{n\pi v}{L}(t - t')\right] H(t - t') \sin\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) f(x', t')\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(x, x', t - t') f(x', t')$$

El caso con extremos libres es similar.

### Condiciones de contorno inhomogéneas.

Consideremos ahora la ec. homogénea (2) con la cond. de contorno no homogénea

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(L, t) = \mu_L(t) \quad (16)$$

Si  $\mu_0(t)$  y  $\mu_L(t)$  son constantes o dependen a lo sumo linealmente de  $t$ , el problema puede resolverse trivialmente:

$$u_0(x, t) = \mu_0(t) + x(\mu_L(t) - \mu_0(t))/L$$

es en tal caso una solución trivial de (2) que satisface la cond. de contorno (16). Por lo tanto, la solución general será  $u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t)$ , donde  $u_1(x, t)$  es una solución de (2) que satisface la cond. de contorno *homogénea* (5).

Si la dependencia no es lineal en  $t$  o constante, podemos igualmente escribir  $u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t)$ , donde  $u_1(x, t)$  satisficará la condición de contorno homogénea (5) y la ec. de onda *inhomogénea* (12), con  $f(x, t) = -\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2}$ . El problema puede luego resolverse como en la sección anterior utilizando la función de Green.

Otra forma de proceder es asumir nuevamente una expansión (14) y utilizar el resultado (15), donde aparecen naturalmente  $u(0, t)$ ,  $u(L, t)$ . Se obtiene así

$$\frac{d^2 c_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 c_n = \frac{2n\pi v^2}{L^2} [\mu_0(t) - (-1)^n \mu_L(t)]$$

de donde

$$c_n(t) = \frac{2v}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left[\frac{n\pi v}{L}(t-t')\right] H(t-t') [\mu_0(t') - (-1)^n \mu_L(t')] dt'$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= -v^2 \int_{-\infty}^{\infty} [G_{x'}(x, L, t-t') \mu_L(t') - G_{x'}(x, 0, t-t') \mu_0(t')] dt' \end{aligned}$$

donde  $G_{x'}(x, x_0, t) \equiv \frac{\partial}{\partial x'} G(x, x', t)|_{x'=x_0}$ . La solución queda así expresada directamente en términos de  $\mu_0(t)$ ,  $\mu_L(t)$ , y las derivadas de la función de Green en los extremos.

### Energía de la cuerda finita

Consideremos por simplicidad el caso de extremos fijos (se deja para el lector el caso con extremos libres). La energía del modo normal (6) es

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho}{2} \int_0^L [u_t^2(x, t) + v^2 u_x^2(x, t)] dx \\ &= \frac{\rho}{2} A_n^2 \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \rho L \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 A_n^2\right] \end{aligned}$$

El último término entre corchetes es la energía  $E_n = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A_n^2$  de un oscilador de masa  $m = \rho L$ , frecuencia  $\omega_n = n\pi v/L$  y amplitud  $A_n$ . La energía del modo normal es pues la *mitad* de la energía del oscilador correspondiente con amplitud máxima  $A_n$  (lograda en el punto medio entre dos nodos).

Debido a la *ortogonalidad* de los modos normales, la energía de la solución general (7) de la ec. homogénea (2) será

$$E = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \rho L \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 A_n^2 = \frac{1}{4} m \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 A_n^2$$

(probar!).

### Funcion de Green de la ecuacion escalar de ondas

Consideremos ahora la ecuación general de ondas,

$$u_{tt} - v^2 \Delta u = f(\mathbf{r}, t) \quad (17)$$

donde  $\Delta$  es el Laplaciano, en una región  $R$  simplemente conexas de un espacio  $n$ -dimensional, con la condición de contorno

$$u(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S$$

y la condición inicial

$$u(\mathbf{r}, 0) = \phi(\mathbf{r}), \quad u_t(\mathbf{r}, 0) = \psi(\mathbf{r})$$

Sean  $u_k(\mathbf{r})$  las autofunciones normalizadas del Laplaciano en dicha región con condiciones de contorno homogéneas,

$$\begin{aligned} -\Delta u_k &= \lambda_k u_k, \quad u_k(\mathbf{r}) = 0 \text{ si } \mathbf{r} \in S \\ \int_R u_k^*(\mathbf{r}) u_{k'}(\mathbf{r}) dV &= \delta_{kk'} \end{aligned}$$

Podemos entonces expandir  $u(\mathbf{r}, t)$  y  $f(\mathbf{r}, t)$  como

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \sum_k c_k(t) u_k(\mathbf{r}, t) \quad c_k(t) = \int_R u_k^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, t) dV \\ f(\mathbf{r}, t) &= \sum_k f_k(t) u_k(\mathbf{r}), \quad f_k(t) = \int_R u_k^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t) dV \end{aligned}$$

y efectuar una integración “por partes” tal que

$$\begin{aligned} - \int_R u_k^* \Delta u dV &= \int_S u \frac{\partial u_k^*}{\partial n} dA - \int_R u \Delta u_k dV \\ &= g_k(t)/v^2 + \lambda_k c_k(t) \end{aligned}$$

donde

$$g_k(t) = v^2 \int_A g(\mathbf{r}, t) \frac{\partial u_k^*(\mathbf{r})}{\partial n} dA$$

Multiplicando la ecuación (17) por  $u_k^*(\mathbf{r})$  e integrando, obtenemos entonces la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 c_k}{dt^2} + v^2 \lambda_k c_k = f_k(t) - g_k(t)$$

La solución para  $c_k(t)$  es (recordar la función de Green para ecuaciones diferenciales ordinarias)

$$\begin{aligned} c_k(t) &= c_k(0) \cos(\omega_k t) + c'_k(0) \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} \\ &\quad + \int_0^t \frac{\sin[\omega_k(t-t')]}{\omega_k} (f_k(t') - g_k(t')) dt' \end{aligned}$$

con  $\omega_k = v\sqrt{\lambda_k}$  las *frecuencias propias* del sistema y

$$c_k(0) = \int_R u_k^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV, \quad c'_k(0) = \int_R u_k^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) dV$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \int_R \int_0^\infty G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt' \\ &+ \int_R [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}') + G_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \phi(\mathbf{r}')] dV' \\ &- v^2 \int_S \int_0^\infty \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')}{\partial n'} g(\mathbf{r}', t') dA' dt' \end{aligned} \quad (18)$$

con

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_k \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}') H(t)$$

la función de Green de la ecuación de ondas, que satisface

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \Delta\right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t)$$

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  es pues la amplitud en  $(\mathbf{r}, t)$  para un impulso puntual en  $(\mathbf{r}', 0)$ , siendo nula para  $t < 0$ .

Por ejemplo, para una cuerda finita de longitud  $a$  con extremos fijos,

$$G(x, x', t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \sin(n\pi x/a) \sin(n\pi x'/a) H(t)$$

con  $\omega_n = v(n\pi/a)$ . Para una membrana circular de radio  $a$  con borde fijo,

$$\begin{aligned} G(r, r', \theta, \theta', t) &= \\ \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n,m} \frac{\sin(\omega_{nm} t)}{\omega_{nm}} \frac{J_n(k_{nm} r/a) J_n(k_{nm} r'/a) e^{in(\theta - \theta')}}{(J'_n(k_{nm}))^2} \end{aligned}$$

donde  $\omega_{nm} = vk_{nm}/a$  son las frecuencias propias y  $k_{nm}$  denota el emésimo cero de  $J_n$  ( $J_n(k_{nm}) = 0$ ), con  $m = 1, 2, \dots$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . La frecuencia fundamental (la más baja) es  $\omega_{01} \approx vk_{01}/a$ , con  $k_{01} \approx \pi \cdot 0.765$ . Notemos que  $\omega_{01} \approx v1.357\pi/\sqrt{A}$ , donde  $A = \pi a^2$  es el área de la membrana. Esta es la frecuencia más baja que puede obtenerse para un área dada con extremos fijos (en una membrana cuadrada, la frec. fundamental es  $v\sqrt{2}\pi/\sqrt{A}$ , como puede mostrar el lector).

Para una cuerda infinita, las autofunciones “normalizadas” son

$$u_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} u_k^*(x) u_{k'}(x) dx = \delta(k - k') \right)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(x, x', t) &= \frac{H(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kvt)}{kv} e^{ik(x-x')} dk \\ &= \frac{H(t)}{2v} [H(x-x'+vt) - H(x-x'-vt)] = \frac{H(vt - |x-x'|)}{2v} \end{aligned}$$

donde la última expresión es válida para  $t > 0$ . Hemos tomado valor principal y recordado que la tranf. de Fourier de  $H(x+a) - H(x-a) = \begin{cases} \text{sgn}[a] & |x| < |a| \\ 0 & |x| > |a| \end{cases}$  es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x+a) - H(x-a)] e^{-ikx} dk &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx \\ &= \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2\pi ik} = \frac{\sin(ka)}{\pi k} \end{aligned}$$

En el espacio tridimensional,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{H(t)}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\sin(vkt)}{vk} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3k \quad (19)$$

donde  $k = |\mathbf{k}|$ . Pasando a coordenadas polares y definiendo  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , se obtiene

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \frac{H(t)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\sin(vkt)}{vk} k^2 dk \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2H(t)}{(2\pi)^2 vr} \int_0^\infty \sin(kvt) \sin(kr) dk = \frac{H(t)}{8\pi^2 vr} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{ik(r-vt)} - e^{ik(r+vt)}] dk \\ &= \frac{H(t)}{4\pi vr} [\delta(r-vt) - \delta(r+vt)] = \frac{\delta(vt-r)}{4\pi vr} \end{aligned}$$

donde la última expresión es válida para  $t > 0$  y representa una superficie esférica alejándose de la fuente con velocidad  $v$  y amplitud proporcional a  $r^{-1}$ . Notemos la gran diferencia con el caso monodimensional. Esta forma de la función de Green permite la transmisión limpia de pulsos en 3 dimensiones.

Ejercicio: Probar que en el caso tridimensional, una solución de la ecuación de ondas que depende sólo de  $r = |\mathbf{r}|$ , debe ser de la forma  $f(r-vt)/r + g(r+vt)/r$ .

En el caso bidimensional, se obtiene

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \frac{H(t)}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{\sin(vkt)}{vk} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^2k \quad (20) \\ &= \frac{H(t)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\sin(vkt)}{vk} k dk \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{H(t)}{2\pi v} \int_0^\infty \sin(kvt) J_0(kr) dk \quad (21) \\ &= \frac{H(t)}{2\pi v} \frac{H((vt)^2 - r^2)}{\sqrt{(vt)^2 - r^2}} \end{aligned}$$

resultado “intermedio” entre los dos anteriores (recordar dibujo de clase).

## Matemáticas Especiales II Ecuación de difusión

Resumen. Sea  $u(\mathbf{r}, t)$  la temperatura de un material conductor con calor específico  $c$  en una región s.c.  $R$  con superficie  $S$ . Teniendo en cuenta que el flujo de calor por unidad de área a través de una superficie es  $\mathbf{J} = -\kappa \nabla u(\mathbf{r}, t)$ , la conservación del calor en presencia de una fuente de calor  $j(\mathbf{r}, t)$  implica la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho c u(\mathbf{r}, t) dV = \kappa \int_S \nabla u(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} + \int_R j(\mathbf{r}, t) dV$$

Esta ecuación implica, teniendo en cuenta el teorema de Green y el hecho de que debe ser válida para cualquier región interna  $R$  del material, la ecuación diferencial

$$u_t(\mathbf{r}, t) - \alpha \Delta u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t)$$

donde  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  es el Laplaciano y  $\alpha = \kappa/(\rho c) > 0$ ,  $f = j/(\rho c)$ . Esta ecuación se denomina ecuación general de difusión y es una ecuación diferencial lineal de tipo parabólico. En ausencia de fuentes se obtiene la ecuación de difusión homogénea

$$u_t(\mathbf{r}, t) - \alpha \Delta u(\mathbf{r}, t) = 0$$

Ambas ecuaciones son obviamente también válidas en dos, una o eventualmente  $n$  dimensiones. Comenzaremos estudiando el caso de una dimensión.

### 1. Evolución de la temperatura en una barra infinita

Consideremos la ecuación

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

para la temperatura  $u(x, t)$  en una barra infinita con la condición inicial

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (2)$$

Mult. la ec. (1) por  $e^{-ikx}$  e integrando respecto de  $x$ , se obtiene

$$U_t(k, t) + \alpha k^2 U(k, t) = 0 \quad (3)$$

donde

$$U(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x, t) dx$$

es la TF de  $u(x, t)$  respecto de  $x$ . La ec. (3) es una ecuación diferencial ordinaria en  $t$  para  $U$ , cuya solución para  $t > 0$  es

$$U(k, t) = e^{-\alpha k^2 t} U(k, 0) \quad (4)$$

donde  $U(k, 0)$  es la TF de  $u(x, 0)$ . Utilizando ahora las propiedades de la TF (ver resumen respectivo) obtenemos, efectuando la transf. inversa,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(k, t) dk \quad (5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(x - x', t) u(x', 0) dx' \quad (6)$$

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{e^{-\alpha k^2 t}}{\sqrt{2\pi}} dk \\ = \frac{e^{-x^2/(4\alpha t)}}{\sqrt{4\pi\alpha t}}, \quad t > 0 \quad (7)$$

$K(x - x', t)$  es la función respuesta de la ec. del calor en la barra infinita y representa la temperatura  $u(x, t)$  en la posición  $x$  y tiempo  $t > 0$  para una temperatura inicial puntual  $u(x, 0) = \delta(x - x')$  localizada en  $x'$ :

$$K_t(x - x', t) - \alpha K_{xx}(x - x', t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} K(x - x', t) = \delta(x - x') \quad (8)$$

Depende en la barra infinita sólo de la diferencia  $x - x'$  por ser en este caso la ec. (1) invariante frente a traslaciones espaciales. La solución gral. (6) puede visualizarse entonces como la suma de soluciones elementales  $K(x - x', t)$  moduladas por el factor  $u(x', 0)$ , dado que  $u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') u(x', 0) dx'$ .

$K(x - x', t)$  es una Gaussiana centrada en  $x = x'$  con desviación estándar  $\sigma(t) = \sqrt{2\alpha t}$ . Dado que la cantidad total de calor debe conservarse, e inicialmente  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx = 1$ , se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) dx = 1$$

$\forall t \geq 0$ , como puede verificarse directamente. Al aumentar  $t$ , la distribución  $K(x, t)$  se "achata", aunque conserva su área. Se recomienda recordar (y también realizar personalmente) las simulaciones mostradas en la PC.

Para  $x \neq 0$  fijo,  $K(x, t)$  posee un máximo en  $t_0 = x^2/(2\alpha)$ , con  $K(x, t_0) = 1/(\sqrt{2\pi} x)$ , disminuyendo luego como  $t^{-1/2}$  para  $t \rightarrow \infty$ . Notemos también que si  $t > 0$ ,  $K(x, t) \neq 0 \forall x \neq 0$ , lo que indica una velocidad infinita de transmisión del calor. La ec. (1) es claramente no relativista, es decir no invariante frente a transformaciones de Lorentz (en contraposición a la ec. de ondas). No obstante,  $K(x, t)$  es muy pequeño para  $x \gg \sigma(t)$ .

Ejemplos:

1) Si  $u(x, 0) = A \cos(kx) = \text{ARe}[e^{ikx}] \Rightarrow$

$$u(x, t) = \text{ARe}[e^{ikx} e^{-\alpha k^2 t}] = A \cos(kx) e^{-\alpha k^2 t}$$

resultado que puede obtenerse de (6)–(7) o directamente de (4), planteando  $u(x, t) = e^{ikx} U(k, t)$ . La sol. gral. (5)

es pues la “suma” de soluciones elementales para cond. iniciales  $u(x, 0) = U(k, 0)e^{ikx}$ . Este ej. muestra también que oscilaciones espaciales iniciales de la temp. decaen tanto más rápidamente cuanto mayor sea la frecuencia  $k$ . Si  $k = 0$ ,  $u(x, t) = A$ , constante.

2) Si  $u(x, 0) = Ae^{-x^2/r}/\sqrt{\pi r}$ ,  $r > 0$  (distribución inicial gaussiana de temperaturas)  $\Rightarrow$

$$u(x, t) = A \frac{e^{-x^2/(r+4\alpha t)}}{\sqrt{\pi(r+4\alpha t)}} = AK(x, t + t_0), \quad t_0 = \frac{r}{4\alpha}$$

lo que puede obtenerse de (6), o directamente notando que  $u(x, 0) = AK(x, t_0)$ . La dist. de temp. permanece gaussiana  $\forall t > 0$ . Si  $r \rightarrow 0^+$ ,  $u(x, t) \rightarrow AK(x, t)$ .

## 2. Ecuación no homogénea. Función de Green.

Consideremos ahora la ec. inhomogénea

$$u_t - \alpha u_{xx} = f(x, t)$$

Procediendo como en el caso anterior, es decir, mult. por  $e^{-ikx}$  e integrando, obtenemos,

$$U_t(k, t) + \alpha k^2 U(k, t) = F(k, t)$$

con  $F(k, t)$  la TF de  $f(x, t)$  respecto de  $x$ . La solución de esta ec. dif. ordinaria en  $t$  es, para  $U(k, -\infty) = 0$

$$U(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2(t-t')} H(t-t') F(k, t') dt'$$

Aplicando ahora la transf. inversa se obtiene

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x', t-t') f(x', t') dx' dt' \quad (9)$$

$$G(x, t) = K(x, t) H(t) = \frac{e^{-x^2/(4\alpha t)}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} H(t) \quad (10)$$

La función  $G(x-x', t-t')$  es la función de Green de la ec. del calor y representa la solución causal  $u(x, t)$  para una inhomogeneidad puntual  $f(x, t) = \delta(x-x')\delta(t-t')$ :

$$G_t(x-x', t-t') - \alpha G_{xx}(x-x', t-t') = \delta(x-x')\delta(t-t')$$

como puede comprobarse directamente utilizando (8) o (9). La solución gral. (9) puede visualizarse nuevamente como la suma de las soluciones elementales  $G(x-x', t-t')$  moduladas por el factor  $f(x', t')$ , dado que  $f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', t') \delta(x-x') \delta(t-t') dt' dx'$ .

## 3. Barra semi-infinita

Consideremos ahora la ec. (1) en la region  $x \geq 0$  con la condición inicial (2) y la condición de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad (11)$$

$\forall t > 0$ . Podríamos proceder como en el caso anterior utilizando la transformada seno en lugar de la TF completa (se dejan los detalles para el lector). No obstante, es equivalente, pero más cómodo y físico, utilizar el método de las imágenes. La cond. (11) se puede simular completando la temp. inicial  $u(x, 0) = \phi(x)$  en forma *impar* para  $x < 0$ :  $u(-x, 0) = -u(x, 0)$ . En tal caso, utilizando la solución (6),

$$u(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(0-x', t) u(x', 0) dx' = 0$$

por ser  $u(x', 0)$  *impar* y  $K(-x', t) = K(x', t)$  *par* (respecto de  $x'$ ). Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x', t) u(x', 0) dx' \\ &= \int_0^{\infty} K_s(x, x', t) u(x', 0) dx' \quad (12) \end{aligned}$$

$$K_s(x, x', t) = K(x-x', t) - K(x+x', t) \quad (13)$$

donde  $K_s(x-x', t)$  es la función respuesta para la barra semi-infinita para la presente cond. de contorno. No es otra cosa que la dif. de las respuestas a una fuente puntual en  $x'$  y en  $-x'$ . Notemos que  $K_s(x, x', t)$  no es más una función de  $x-x'$ , ya que se ha perdido la invarianza traslacional. Tampoco se conserva la cantidad de calor  $Q(x', t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} K_s(x, x', t) dx$ , ya que el sistema pierde calor en  $x=0$ . Tenemos en cambio  $Q(x', t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ , como puede comprobarse fácilmente.

En forma análoga se procede para el caso inhomogéneo. Completando a  $f(x, t)$  en forma impar respecto de  $x=0$   $\forall t$ , obtenemos

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} G_s(x, x', t-t') f(x', t') dx' \right] dt' \quad (14)$$

con

$$G_s(x, x', t) = K_s(x, x', t) H(t) = G(x-x', t) - G(x+x', t)$$

que representa la diferencia de las respuestas del sistema a una inhomogeneidad puntual en  $(x', t')$  y en  $(-x', t')$ .  $K_s$  y  $G_s$  quedan definidas por

$$\begin{aligned} K_{st}(x, x', t) - \alpha K_{sxx}(x, x', t) &= 0, \quad x > 0, x' > 0, t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} K_s(x, x', t) &= \delta(x-x'), \quad K_s(0, x', t) = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{st}(x, x', t) - \alpha G_{sxx}(x, x', t) &= \delta(x-x')\delta(t-t'), \quad x > 0, x' > 0 \\ G_s(0, x', t) &= 0 \end{aligned}$$

En forma análoga se procede con la condición de contorno de Neumann

$$u_x(0, t) = 0$$

que corresponde a una barra térmicamente *aislada* en  $x = 0$ . En este caso se debe completar la condición inicial y la inhomogeneidad en forma *par* respecto de  $x = 0$ :  $u(-x, 0) = u(x, 0)$ ,  $f(-x, t) = f(x, t)$ . Las soluciones se obtienen como en el caso anterior reemplazando  $K_s(x, x', t)$  y  $G_s(x, x', t)$  por

$$\begin{aligned} K_c(x, x', t) &= K(x - x', t) + K(x + x', t) \\ G_c(x, x', t) &= K_c(x, x', t)H(t) = G(x - x', t) + G(x + x', t) \end{aligned}$$

que representan ahora la suma de las respuestas a fuentes puntuales en  $x'$  y en  $-x'$  y que satisfacen las mismas ecuaciones anteriores pero con la cond. de contorno  $K_{cx}(0, x', t) = 0$ ,  $G_{cx}(0, x', t) = 0$ . No son funciones de  $x - x'$ , aunque en este caso se verifica

$$\int_0^\infty K_c(x, x', t) dx = 1$$

$\forall t \geq 0$ , ya que el sistema está aislado (se deja como ejercicio para el lector).

#### 4. Condiciones de contorno inhomogéneas

Resulta de gran interés físico resolver el problema de la determinación de la temperatura en una barra semi-infinita conociendo la temperatura en el origen. Un ejemplo es la determinación de la temp. por debajo de la superficie terrestre a una profundidad  $x$ , conociendo la temp. en la superficie. Consideremos pues la ec.

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0, \quad x > 0 \quad (16)$$

con la cond. inicial  $u(x, -\infty) = 0$  y la cond. de contorno

$$u(0, t) = g(t)$$

Consideremos primero el caso más simple en que

$$g(t) = G \cos(\omega t) = G \operatorname{Re}[e^{i\omega t}]$$

Planteando una solución del tipo

$$u(x, t) = G e^{i\omega t} v(x)$$

se obtiene para  $v(x)$  la ec.

$$i\omega v - \alpha v'' = 0$$

cuya solución es

$$v(x) = A_1 e^{\sqrt{i\omega/\alpha}x} + A_2 e^{-\sqrt{i\omega/\alpha}x}$$

con  $\sqrt{i\omega/\alpha} = e^{i\pi/4} \sqrt{\omega/\alpha} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$ . La condición  $v(\infty) < \infty$  implica

$$v(x) = \begin{cases} A_2 e^{-x(1+i)\gamma(\omega)} & \omega > 0 \\ A_1 e^{-x(1-i)\gamma(\omega)} & \omega < 0 \end{cases}, \quad \gamma(\omega) = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\alpha}} \quad (17)$$

Por lo tanto, si  $\omega > 0$ , la solución que satisface la cond. de contorno es

$$u(x, t) = G e^{-x\gamma(\omega)(1+i) + i\omega t} \quad (18)$$

con

$$\operatorname{Re}[u(x, t)] = G e^{-\gamma(\omega)x} \cos(\omega t - \gamma(\omega)x)$$

que indica una disminución exponencial de las oscilaciones térmicas que ocurren en la superficie. La longitud de penetración  $d(\omega) = 1/\gamma(\omega) = \sqrt{2\alpha/\omega}$  disminuye al aumentar  $\omega$ . Surge además un retraso  $\delta t = x\gamma(\omega)/\omega = x/\sqrt{2\alpha\omega}$  en las oscilaciones a una profundidad  $x$ , que aumenta con  $x$  y disminuye al aumentar  $\omega$ . Notemos finalmente que si  $\omega = 0 \Rightarrow u(x, t) = G$  (solución estacionaria constante).

La solución *general* para una condición de contorno arbitraria puede hallarse como suma de las soluciones anteriores, desarrollando a  $g(t) = u(0, t)$  en integral de Fourier:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

Efectuando la TF de la ec. (16) respecto de  $t$ , se obtiene

$$i\omega U(x, \omega) - \alpha U_{xx}(x, \omega) = 0 \quad (19)$$

con

$$U(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt$$

la TF de  $u(x, t)$  respecto de  $t$ , que satisface  $U(0, \omega) = G(\omega)$ . La solución de (19) acotada para  $x \rightarrow \infty$  es, utilizando (17),

$$U(x, \omega) = G(\omega) e^{-x\gamma(\omega)(1+iSg(\omega))}$$

donde  $Sg(\omega)$  es el signo de  $\omega$ . Antitransformando esta ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_s(x, t - t') g(t') dt' \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_s(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x\gamma(\omega)(1+iSg(\omega)) + i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} d\omega \\ &= \frac{x e^{-x^2/(4\alpha t)}}{t \sqrt{4\pi\alpha t}} H(t) \end{aligned} \quad (21)$$

$\tilde{G}_s(x, t - t')$  representa la solución para la condición de borde puntual  $u(0, t) = \delta(t - t')$  y depende de la dif.  $t - t'$ . Para  $t > 0$ ,  $\tilde{G}_s(x, t)$  posee, como función de  $x$ , un máximo en  $x_0 = \sqrt{2\alpha t}$ , con  $\tilde{G}_s(x_0, t) = 1/(\sqrt{2\pi e t})$ .



Este resultado puede también obtenerse por los métodos generales de fn. de Green (véase clase 21). Notemos que

$$\tilde{G}_s(x, t) = \alpha \frac{\partial G_s(x, x', t)}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = -2\alpha \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} \quad (22)$$

*Resolución por transformada seno (TS):* Otra forma de llegar al mismo resultado es mediante la TS respecto de  $x$ . En primer lugar, para una función  $f$  con  $f(\infty) = 0$ , obtenemos, integrando por partes dos veces,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f''(x) \sin(kx) dx &= f'(x) \sin(kx) \Big|_0^\infty - k \int_0^\infty f'(x) \cos(kx) dx \\ &= -kf(0) \cos(kx) \Big|_0^\infty - k^2 \int_0^\infty f(x) \sin(kx) dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $F_s(k)$  es la TS de  $f(x)$ , la TS de  $f''(x)$  es

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f''(x) \sin(kx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k f(0) - k^2 F_s(k)$$

Si  $f(0) = 0$ , que es la condición de contorno natural para la expansión en las funciones  $\sin(kx)$ , el resultado es simplemente  $-k^2 F_s(k)$ , y puede obtenerse directamente derivando la expresión inversa

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(k) \sin(kx) dk$$

Pero si  $f(0) \neq 0$  aparece un término adicional.

Por lo tanto, si efectuamos la TS de la ec. (16) (es decir, mult. por  $\sin(kx)$  e integrando), obtenemos

$$U_{s,t}(k, t) + k^2 \alpha U_s(k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha k g(t) \quad (23)$$

donde  $g(t) = u(0, t)$  y

$$U_s(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x, t) \sin(kx) dx$$

es la TS de  $u(x, t)$  respecto de  $x$ . Si  $U_s(k, -\infty) = 0$ , la solución de (23) es

$$U_s(k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha k \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha k^2(t-t')} H(t-t') g(t') dt'$$

Efectuando la transf. inversa, y notando que

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha k^2 t} k \sin(kx) dk &= \frac{-\partial}{\partial x} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha k^2 t} e^{ikx} dk \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-x^2/(4\alpha t)}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \end{aligned} \quad (24)$$

se obtiene nuevamente el resultado (20)–(21). La solución para un flujo dado  $u_x(0, t) = g(t)$  en el origen se puede resolver en forma similar utilizando la transf. coseno  $F_c(k)$  (ver tabla siguiente) y se deja como ejercicio.

	$f(x)$	$F_s(k)$	$F_c(k)$
1	$f'(x)$	$-k F_c(k)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + k F_s(k)$
2	$f''(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} k f(0) - k^2 F_s(k)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) - k^2 F_c(k)$

## 5. Evolución de la temperatura en regiones finitas

Consideremos la evolución de la temperatura  $u(x, t)$  en una barra finita de longitud  $L$ , con condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

y condición inicial

$$u(x, 0) = \phi(x)$$

Podemos plantear  $u(x, t) = X(x)T(t)$  en la ecuación

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0$$

obteniéndose

$$\frac{T'}{\alpha T} = \frac{X''}{X} = -k^2$$

que conduce a  $T(t) = T(0)e^{-\alpha k^2 t}$  y  $X(x) = A \cos kx + B \sin kx$  para  $k \neq 0$  (para  $k = 0$  se obtiene en cambio  $X(x) = A + Bx$ ). La condición de contorno implica  $X(0) = X(L) = 0$ , en cuyo caso  $A = 0$  y  $k = n\pi/L$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Se obtiene entonces la solución producto

$$X_n(x)T_n(t) = c_n e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t} \sin(n\pi x/L)$$

y la solución general

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty c_n e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t} \sin(n\pi x/L)$$

La condición inicial implica

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^\infty c_n \sin(n\pi x/L) = \phi(x)$$

lo cual constituye el desarrollo en serie de medio rango en senos de  $\phi(x)$  y determina los coeficientes  $c_n$ :

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \phi(x) dx$$

El resultado final puede luego expresarse como

$$u(x, t) = \int_0^L K(x, x', t) \phi(x') dx'$$

donde

$$K(x, x', t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)$$

representa la función respuesta de la ecuación de difusión en la barra finita con las condiciones de contorno anteriores. La condición inicial es pues naturalmente descompuesta en “modos normales” que exhiben

un decaimiento exponencial  $\propto e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t}$ . Para tiempos grandes, únicamente el modo simétrico fundamental ( $\sin(\pi x/L)$ ) permanecerá visible (si  $c_1 \neq 0$ ), con una amplitud  $c_1 e^{-(\pi/L)^2 \alpha t}$ .

Notemos también que el problema con temperatura fija en los bordes,

$$u(0, t) = T_0, \quad u(L, t) = T_L$$

siendo  $T_0$  y  $T_L$  independientes de  $t$ , puede reducirse al problema anterior si reemplazamos

$$u(x, t) = w(x, t) + T_0 + \frac{x}{L}(T_L - T_0)$$

La función lineal constante de la derecha se encarga de la condición de contorno y satisface exactamente la ecuación de difusión homogénea (es una solución estacionaria) por lo que  $w(x, t)$  satisface también la ecuación de difusión homogénea pero con condiciones de contorno *homogéneas* ( $w(0, t) = w(L, t) = 0$ ).  $w(x, t)$  estará pues dada por la solución anterior (con  $w(x, 0) = u(x, 0) - (T_0 + \frac{x}{L}(T_L - T_0))$ ). En este caso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = T_0 + \frac{x}{L}(T_L - T_0)$$

En clase se han visto además otros problemas análogos (barra finita con fuentes, barra finita aislada, regiones bidimensionales, círculos y esferas, etc.). Daremos aquí solamente la función de Green para una región general.

## 6. Función de Green de la ecuación general de difusión

Consideremos la ecuación

$$u_t - \alpha \Delta u = f(\mathbf{r}, t), \quad \alpha > 0$$

en una región s.c.  $R$ , con la condición de contorno

$$u(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S$$

y la condición inicial

$$u(\mathbf{r}, 0) = \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R$$

Mediante la expansión

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_k c_k(t) u_k(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r}, t) = \sum_k f_k(t) u_k(\mathbf{r}) \quad (25)$$

donde  $u_k(\mathbf{r})$  son las autofunciones del Laplaciano con condiciones de contorno homogéneas,

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k, \quad u_k(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{si } \mathbf{r} \in S$$

y

$$c_k(t) = \int_R u_k^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, t) dV, \quad f_k(t) = \int_R u_k^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t) dV \quad (26)$$

se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para  $c_k(t)$  (recordar detalles de clase)

$$\frac{dc_k}{dt} + \alpha \lambda_k c_k = f_k(t) - g_k(t)$$

donde  $g_k(t) = \alpha \int_A g(\mathbf{r}, t) \frac{\partial u_k^*(\mathbf{r})}{\partial n} dA$ . La solución es

$$c_k(t) = c_k(0) e^{-\alpha \lambda_k t} + \int_0^t e^{-\alpha \lambda_k (t-t')} (f_k(t') - g_k(t')) dt'$$

con

$$c_k(0) = \int_R u_k^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV$$

Obtenemos finalmente

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_R \int_0^\infty G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt' + \int_R G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \phi(\mathbf{r}') dV' - \alpha \int_S \int_0^\infty \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t')}{\partial n'} g(\mathbf{r}', t') dA' dt' \quad (27)$$

donde

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t') = \sum_k e^{-\alpha \lambda_k (t-t')} u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}') H(t-t') \quad (28)$$

$$= K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t') H(t-t') \quad (29)$$

es la función de Green de la ecuación de difusión y satisface

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \Delta \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t-t')$$

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t')$  es pues la temperatura en  $(\mathbf{r}, t)$  para una fuente de calor puntual en  $(\mathbf{r}', t')$ , siendo nula para  $t < t'$ . En cambio,  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_k e^{-\alpha \lambda_k t} u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}')$  satisface la ecuación de difusión homogénea,  $K_t - \alpha \Delta K = 0$ , con condición inicial  $\lim_{t \rightarrow 0^+} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .

Por ejemplo, para una barra finita de longitud  $a$ ,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / a^2} \sin(n\pi x/a) \sin(n\pi x'/a) H(t)$$

para una barra infinita,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{H(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2 t} e^{ik(x-x')} dk = \frac{e^{-(x-x')^2/4\alpha t}}{2\sqrt{\pi\alpha t}} H(t)$$

y para el espacio tridimensional,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{H(t)}{(2\pi)^3} \int_{R^3} e^{-\alpha |\mathbf{k}|^2 t} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k = \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2/4\alpha t}}{(2\sqrt{\pi\alpha t})^3} H(t)$$

ya que la integral se descompone en el producto de 3 integrales similares a la del caso de una dimensión. La función de Green de la ecuación de difusión conserva pues

la misma forma gaussiana en 1, 3, 2 o  $n$  dimensiones, a diferencia de la función de Green de la ecuación de ondas.

Se deja como ejercicio determinar la función de Green para un círculo y para una esfera, ambos de radio  $a$ .

La solución del problema general

$$u_t + \alpha L_{\mathbf{r}}(u) = f(\mathbf{r}, t), \quad \alpha > 0$$

en una región s.c.  $R$  con  $L_{\mathbf{r}}(u) = -\Delta_{\mathbf{r}}u + q(\mathbf{r})$ , la condición de contorno

$$u(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S$$

y la condición inicial

$$u(\mathbf{r}, 0) = \phi(\mathbf{r})$$

está dada nuevamente por la expresión (27), con  $G$  dada nuevamente por la expresión (28)–(29), con  $L_{\mathbf{r}}(u_k) = \lambda_k u_k$  y  $u_k(\mathbf{r}) = 0$  en  $S$ .  $G$  satisface

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha L_{\mathbf{r}}\right)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (30)$$

con  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = 0$  para  $\mathbf{r} \in S$  y  $G = 0$  para  $t < t'$ . La expresión (27) para la solución general puede obtenerse mediante el desarrollo en autofunciones, o directamente de la ecuación (30), intercambiando  $\mathbf{r}$  por  $\mathbf{r}'$ , multiplicando luego por  $u(\mathbf{r}', t')$  e integrando respecto de  $\mathbf{r}'$  y  $t'$  en  $R$  y  $(0, \infty)$  respectivamente, aplicando el teorema de Green en  $\mathbf{r}'$  y la integración por partes en  $t'$ . Se dejan los detalles para el lector.

### 1. RESOLUCION DE LA ECUACION DE LAPLACE POR SEPARACION DE VARIABLES

#### 1.1 Armónicos circulares

Consideremos la ecuación de Laplace  $\Delta u = 0$ , con

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1)$$

en un sector circular  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq \theta \leq \alpha < 2\pi$ . Planteando una solución producto  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ , se obtienen las ecuaciones

$$R'' + \frac{R'}{r} - \frac{k^2 R}{r^2} = 0, \quad \Theta'' = -k^2 \Theta$$

con  $k$  constante, cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} R(r) &= Ar^k + Br^{-k}, \quad \Theta(\theta) = a \cos(k\theta) + b \sin(k\theta), \quad k \neq 0 \\ R(r) &= A + B \ln r = B \ln \frac{r}{r_0}, \quad \Theta(\theta) = a + b\theta, \quad k = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

(la ec. para  $R$  es del tipo de Euler y su solución es de la forma  $r^\lambda$ , con  $\lambda$  determinado por  $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - k^2 = 0$ , o sea,  $\lambda = \pm k$ ; si  $k = 0$  la otra solución l. i. de  $r^0 = 1$  es  $r^\lambda \ln r = \ln r$ ). Obsérvese que  $k$  puede ser en principio real, imaginario o complejo (si  $k = k_r + ik_i$ ,  $r^k = e^{k \ln r} = e^{k_r \ln r} [\cos(k_i \ln r) + i \sin(k_i \ln r)]$ ).

Como ejemplo, si  $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0$ , con

$$u(r_1, \theta) = f_1(\theta), \quad u(r_2, \theta) = f_2(\theta)$$

$\Rightarrow a = 0$  y  $k = n\pi/\alpha$  (real), con  $n \geq 1$ . La solución general es entonces

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{n\pi/\alpha} + B_n r^{-n\pi/\alpha}) \sin(n\pi\theta/\alpha) \quad (3)$$

donde las constantes  $A_n$  y  $B_n$  pueden obtenerse a partir del desarrollo en serie de senos de  $f_1(\theta)$  y  $f_2(\theta)$ . Se dejan los detalles para el lector. Obviamente, si  $u$  debe permanecer acotada y  $r_1 = 0 \Rightarrow B_n = 0$ , mientras que si  $r_1 > 0$  y  $r_2 = \infty \Rightarrow A_n = 0$ .

En el caso de un anillo circular  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , con  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $u$  debe ser *monovaluada*, lo que implica  $k = n$ , con  $n$  entero (y  $b = 0$  si  $k = n = 0$ ). La solución general es pues de la forma

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= A_0 + B_0 \ln r \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \end{aligned} \quad (4)$$

Nuevamente, si  $r_1 = 0 \Rightarrow B_0 = 0$ ,  $B_n = 0$ , mientras que si  $r_2 = \infty$ ,  $B_0 = 0$ ,  $A_n = 0$ ,  $n \geq 1$ .

Consideremos ahora en detalle el problema de determinar una función armónica  $u$  en el interior de un círculo de radio  $r_2 = a$  (o sea  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) conociendo los valores de  $u$  en el contorno,  $u(a, \theta) = f(\theta)$ . La solución general debe ser pues de la forma

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \quad (5)$$

Por lo tanto,

$$u(a, \theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

de donde, recordando la expresión de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier,

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) f(\theta) d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f(\theta) d\theta, \quad n \geq 1$$

con  $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \langle f \rangle$ . Reemplazando en (5), y teniendo en cuenta que  $\cos(n\theta) \cos(n\theta') + \sin(n\theta) \sin(n\theta') = \cos[n(\theta - \theta')]$ , obtenemos

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} \cos[n(\theta - \theta')] \right\} f(\theta') d\theta'$$

Definiendo  $z = (r/a)e^{i\theta}$ , con  $|z| < 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{2d^2(r, a, \theta)}, \quad d^2(r, a, \theta) = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta) \end{aligned}$$

Obtenemos de esta forma la solución de Poisson,

$$u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta') d\theta'}{d^2(r, a, \theta - \theta')}, \quad r < a \quad (6)$$

Notemos que  $d(r, a, \theta - \theta')$  es la *distancia* entre el punto  $(r, \theta)$  del interior del círculo y el punto  $(a, \theta')$  del borde (recordar dibujo hecho en clase).

*Comentarios:*

1) Si  $r = 0$ ,  $d^2 = a^2$  y

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') d\theta' = \langle f \rangle$$

El valor de  $u$  en el centro del círculo es pues el *promedio* de los valores de  $u$  en el borde del círculo. Como esto es válido para cualquier círculo con centro en  $(0, 0)$  y radio  $r < a$ , vemos que el valor de una función  $u$ , armónica en una región  $R$ , en un punto cualquiera  $(x, y) \in R$  es

igual al *promedio* de los valores de  $u$  sobre cualquier circunferencia con centro en  $(x, y)$  contenida en  $R$ , y por lo tanto, sobre cualquier región circular con centro en  $(x, y)$ . Una función armónica no puede pues poseer extremos (máximos o mínimos) en el interior de  $R$  (ya que en tal caso el valor en el extremo sería superior o inferior al promedio), estando los extremos siempre en el borde de  $R$ .

2) Problema exterior: Consideremos ahora el problema de determinar  $u(r, \theta)$  en el exterior del círculo, es decir  $r \geq a$ , conociendo los valores en el borde,  $u(a, \theta) = f(\theta)$ . Podemos repetir el esquema anterior pero es más fácil emplear el siguiente procedimiento de inversión. Si  $u(r, \theta)$  es una función armónica de la forma general (4), entonces

$$v(r, \theta) = u\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) = A_0 - B_0 \ln \frac{r}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{a^{2n}}{r^n} + B_n \frac{r^n}{a^{2n}} \right) [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

es armónica pues es también de la forma (4), y cumple  $v(a, \theta) = u(a, \theta)$ . Además, si  $u$  está definida para  $r < a \Rightarrow v$  estará definida para  $a^2/r < a$ , o sea,  $r > a$ . Por lo tanto, la solución para el exterior del círculo será

$$v(r, \theta) = u\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) = \frac{r^2 - a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta') d\theta'}{d^2(r, a, \theta - \theta')}, \quad r > a$$

(notar que  $d\left(\frac{a^2}{r}, a, \theta\right) = \frac{a}{r} d(a, r, \theta) = \frac{a}{r} d(r, a, \theta)$ ). Esto equivale al intercambio  $a \leftrightarrow r$  en (6).

En forma análoga se resuelve el problema de Neumann ( $\Delta u = 0$ , con  $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=a} = f(\theta)$  y  $\langle f \rangle = 0$ ) para el interior y exterior del círculo (se deja como ejercicio).

3) La solución (6) puede escribirse como

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} K(r, a, \theta - \theta') f(\theta') d\theta'$$

$$K(r, a, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi[a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta)]} \quad (7)$$

donde  $K(r, a, \theta)$  representa la solución para  $f(\theta) = \delta(\theta)$ . Puede comprobarse que  $u(r, \theta) = K(r, a, \theta)$  es una función armónica que satisface  $\lim_{r \rightarrow a^-} K(r, a, \theta) = \delta(\theta)$ , con  $\lim_{r \rightarrow a^-} K(r, a, \theta) = 0$  si  $\theta \neq 0$  (o en general,  $\theta \neq 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) y  $\lim_{r \rightarrow a^-} K(r, a, 0) = \infty$  (recordar el gráfico de  $K$  hecho en clase).

### 1.3 Armónicos esféricos y solución de Poisson para la esfera

Consideremos ahora la ec.  $\Delta u = 0$  en una región esférica  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , donde  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas polares usuales (definidas

por  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ ). Emplearemos la notación  $\Omega = (\theta, \phi)$ , con  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . En estas coordenadas,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Delta_{\Omega}}{r^2}$$

$$\Delta_{\Omega} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (8)$$

Planteando una solución producto  $u(r, \theta) = R(r)Y(\Omega)$ , se obtienen las ecuaciones

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{k^2}{r^2} R = 0, \quad \Delta_{\Omega} Y = -k^2 Y$$

con  $k$  constante. Hemos visto que la solución de la parte angular es acotada y monovaluada sólo si  $k^2 = l(l+1)$ , con  $l$  natural, con  $Y(\Omega) = Y_{lm}(\Omega)$  el armónico esférico de orden  $l$ :

$$-\Delta_{\Omega} Y_{lm}(\Omega) = l(l+1) Y_{lm}(\Omega), \quad -l \leq m \leq l, \quad l = 0, 1, \dots$$

$$Y_{lm}(\Omega) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}$$

donde  $P_l^{|m|}(x)$  es el polinomio asociado de Legendre (y  $P_l^0(x) = P_l(x)$  el polinomio de Legendre).  $Y_{lm}(\Omega)$  son las autofunciones *normalizadas* de  $\Delta_{\Omega}$ :

$$\int_s Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (9)$$

donde  $\int_s d\Omega = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi$  denota la integral sobre toda la superficie esférica y  $Y_{lm}^*(\Omega) = (-1)^m Y_{l-m}(\Omega)$  en la presente convención de fases.

La ec. para la parte radial es nuevamente del tipo de Euler, con solución  $r^{\lambda}$  y  $\lambda$  determinado por

$$\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - l(l+1) = 0$$

cuyas soluciones son  $\lambda = l$ ,  $\lambda = -l - 1$ . La solución producto es pues de la forma

$$R(r)Y(\Omega) = (ar^l + br^{-l-1})Y_{lm}(\Omega)$$

Soluciones independientes de  $\phi$  (es decir, invariantes frente a rotaciones alrededor del eje  $z$ ) corresponden a  $m = 0$ , con  $l$  arbitrario, mientras que soluciones independientes de  $\theta$  y  $\phi$  (es decir, invariantes frente a rotaciones) se obtienen sólo para  $l = 0$ , y son de la forma  $u(r) = a + b/r$ .

La solución *general* para  $u(r, \Omega)$  es pues de la forma

$$u(r, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}] Y_{lm}(\Omega) \quad (10)$$

Para soluciones acotadas, si  $r_1 = 0 \Rightarrow b_{lm} = 0$  mientras que si  $r_2 = \infty \Rightarrow a_{lm} = 0$ .

Consideremos ahora el problema de determinar la función armónica  $u(r, \Omega)$  en el interior de una esfera de radio  $r_2 = a$ , conociendo sus valores en la superficie,  $u(a, \Omega) = f(\Omega)$ . La función debe ser pues de la forma

$$u(r, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} r^l Y_{lm}(\Omega) \quad (11)$$

La condición de contorno implica

$$u(a, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} a^l Y_{lm}(\Omega) = f(\Omega)$$

que representa el desarrollo en serie de armónicos esféricos de  $f(\Omega)$ . Teniendo en cuenta (9), los coeficientes estarán dados por

$$a_{lm} = \frac{1}{a^l} \int_s Y_{lm}^*(\Omega) f(\Omega) d\Omega \quad (12)$$

Si  $f(\Omega) = f(\theta) \Rightarrow a_{lm} = 0$  si  $m \neq 0$  y  $u(r, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos \theta)$ , con  $c_l = a_{l0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$ . Si  $f(\Omega) = c \Rightarrow c_l = 0$  para  $l \neq 0$  (por ortogonalidad de  $P_l$ ,  $l \neq 0$ , con  $P_0 = 1$ ) y  $u(r, \Omega) = c$ .

En general, utilizando (12) obtenemos

$$u(r, \Omega) = \int_s \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega') \right] f(\Omega') d\Omega' \quad (13)$$

Para evaluar esta serie recordemos primero el *teorema de adición* para armónicos esféricos,

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta_0) \quad (14)$$

donde  $\theta_0$  es el ángulo entre las direcciones determinadas por  $\Omega$  y  $\Omega'$ , y queda definido por

$$\begin{aligned} \cos(\theta_0) &= \mathbf{n}(\Omega) \cdot \mathbf{n}(\Omega') \\ &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \end{aligned} \quad (15)$$

con  $\mathbf{n}(\Omega) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ . La ec. (14) refleja el hecho de que el primer miembro es un escalar que depende sólo del ángulo  $\theta_0$  entre  $\Omega$  y  $\Omega'$ . En tal caso, eligiendo  $\Omega = (\theta, \phi) = (0, 0)$ , y dado que  $Y_{lm}(0, 0) = \delta_{m0} Y_{l0}(0, 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$  (pues  $P_l^m(1) = \delta_{m0}$ ), obtenemos

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}(0, 0) Y_{lm}(\Omega') = Y_{l0}(0, 0) Y_{l0}^*(\Omega') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta')$$

lo cual conduce a (14) pues  $\theta_0 = \theta'$  si  $\theta = 0$ . Asimismo, (14) refleja el hecho de que como función de  $\Omega$ ,  $P_l(\cos \theta_0)$  es también autofunción de  $\Delta_{\Omega}$  con autovalor  $-l(l+1)$ , y

debe ser por lo tanto *combinación lineal* de las autofunciones  $Y_{lm}(\Omega)$  con el *mismo*  $l$ :

$$\begin{aligned} P_l(\cos \theta_0) &= \sum_{m=-l}^l c_m Y_{lm}(\Omega), \\ c_m &= \int_s Y_{lm}^*(\Omega) P_l(\cos \theta_0) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\Omega') \end{aligned}$$

Debemos ahora evaluar la serie

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta_0), \quad r < a \quad (16)$$

Para ello, recordemos la expansión

$$\frac{1}{d(r, a, \theta_0)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta_0), \quad r < a \quad (17)$$

$$d(r, a, \theta_0) = (a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta_0)^{1/2} \quad (18)$$

que puede obtenerse reconociendo que el primer miembro es una función armónica tridimensional de  $r, \theta_0$  para  $r < a$  y que por lo tanto debe ser de la forma  $\sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos \theta_0)$ .

Para  $\theta_0 = 0$ ,  $d^{-1}(r, a, 0) = (a-r)^{-1} = a^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (r/a)^l$ , por lo que  $c_l = 1/a^{l+1}$ . Derivando ahora (17) respecto de  $r$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta_0) &= r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta_0) \\ &= \frac{-r(r-a \cos \theta_0)}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta_0)^{3/2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta_0) = \frac{a^2 - r^2}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta_0)^{3/2}} \quad (19)$$

Utilizando (13), (14), (19) obtenemos finalmente la solución de Poisson para el interior de la esfera,

$$u(r, \Omega) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int_s \frac{f(\Omega') d\Omega'}{d^3(r, a, \theta_0)}, \quad r < a \quad (20)$$

donde  $\theta_0$  está determinado por (15) y  $d(r, a, \theta_0)$ , dado por (18), es la distancia entre el punto  $\mathbf{r}$  de coordenadas polares  $(r, \Omega)$  situado en el interior de la esfera y el punto  $\mathbf{r}' = (a, \Omega')$  de la superficie (recordar el dibujo en clase). Si  $\Omega = (\theta, \phi) = (0, 0) \Rightarrow \theta_0 = \theta'$ .

*Comentarios:*

1) Nuevamente, en el centro de la esfera ( $r = 0$ ), el valor de  $u$  es el *promedio* de sus valores en la superficie, pues en este caso  $d = a$  y entonces

$$u(0) = \frac{1}{4\pi} \int_s f(\Omega') d\Omega' = \langle f \rangle$$

El valor de una función armónica  $u$  en un punto es pues el promedio de los valores en cualquier superficie esférica con centro en ese punto, contenida en la región  $R$  donde  $u$  está definida, y por lo tanto en cualquier esfera con centro en el punto. No puede pues poseer extremos en el interior de  $R$ .

2) Problema exterior: Consideremos el problema de determinar  $u$  armónica en el exterior de la esfera ( $r > a$ ), conociendo sus valores en la superficie,  $u(a, \Omega)$ . A partir de (10) vemos que si  $u$  es armónica, entonces

$$\begin{aligned} v(r, \Omega) &= \frac{a}{r} u\left(\frac{a^2}{r}, \Omega\right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} + b_{lm} \frac{r^l}{a^{2l+1}}] Y_{lm}(\Omega) \end{aligned}$$

es también armónica pues es de la forma (10), y satisface  $v(a, \Omega) = u(a, \Omega)$ . Además, si  $u$  está definida para  $r < a \Rightarrow v$  estará definida para  $r > a$ . Por lo, tanto, la solución para el exterior de la esfera es

$$v(r, \Omega) = \frac{a}{r} u\left(\frac{a^2}{r}, \Omega\right) = \frac{a(r^2 - a^2)}{4\pi} \int_s \frac{f(\Omega') d\Omega'}{d^3(r, a, \theta_0)}, \quad r > a$$

3) La solución (20) puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(r, \Omega) &= \int_s K(r, a, \theta_0) f(\Omega) d\Omega \\ K(r, a, \theta_0) &= \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi d^3(r, a, \theta_0)} \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $K(r, a, \theta_0)$  es la solución para  $f(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega') \equiv \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') / \sin(\theta)$ . Puede comprobarse que  $K$  es armónica y satisface  $\lim_{r \rightarrow a^-} K(r, a, \theta_0) = \delta(\Omega - \Omega')$ .

#### 1.4 Armónicos rectangulares

Consideremos ahora la ec. de Laplace  $\Delta u = 0$  en el interior de un rectángulo  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ . Estudiaremos el problema de Dirichlet correspondiente, o sea, la determinación de  $u$  a partir de sus valores en el borde del rectángulo,

$$u(x, b) = f_1(x), \quad u(x, 0) = f_2(x), \quad u(a, y) = f_3(y), \quad u(0, y) = f_4(y)$$

Debido a la linealidad de la ecuación y el consiguiente principio de superposición, podemos escribir la solución en la forma

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

donde  $u_1$  es la solución para  $f_2 = f_3 = f_4 = 0$  y, en general,  $u_i$  aquella para  $f_j = 0$  si  $j \neq i$ .

Consideremos por ejemplo  $u_1$ . Planteando una solución del tipo

$$u_1(x) = X(x)Y(y)$$

tenemos  $\Delta u_1 = X''Y + XY'' = 0$ , o sea,  $X''/X + Y''/Y = 0$ , obteniéndose las ecuaciones

$$X'' = -k^2 X, \quad Y'' = k^2 Y$$

con  $k$  constante. Las soluciones son de la forma

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad Y(y) = C \cosh(ky) + D \sinh(ky)$$

para  $k \neq 0$  y  $X(x) = A + Bx$ ,  $Y(y) = C + Dy$  para  $k = 0$ . Como  $u_1(0, y) = u_1(a, y) = 0 \Rightarrow X(0) = X(a) = 0$ , lo que implica  $k = n\pi/a$  (real), con  $n = 1, 2, \dots$ . La condición  $u_1(x, 0) = 0$  implica además  $C = 0$ . Por lo tanto,

$$X(x)Y(y) = A \sin(k_n x) \sinh(k_n y), \quad k_n = n\pi/a$$

y la solución general para  $u_1$  es

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \sinh(k_n y)$$

La condición de contorno

$$u_1(x, b) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \sinh(k_n b)$$

determina los coeficientes  $A_n$ ,

$$A_n = \frac{2}{a \sinh(k_n b)} \int_0^a f_1(x) \sin(k_n x) dx$$

La solución final puede pues escribirse como

$$u_1(x, y) = \int_0^a \left[ \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(k_n x') \frac{\sinh(k_n y)}{\sinh(k_n b)} \right] f_1(x') dx' \quad (22)$$

En forma análoga se procede para los demás casos. Por ejemplo,  $u_2(x, y)$  será de la forma

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sinh[k_n(b - y)]$$

Se dejan como ejercicio los demás casos y detalles, así como el problema de Neumann correspondiente.

Consideremos ahora el caso en que  $a \rightarrow \infty$ , es decir, la franja  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq b$ . Consideremos las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = f(y)$$

Planteando una solución de la forma  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , tenemos

$$X'' = k^2 X, \quad Y'' = -k^2 Y$$

cuyas soluciones conviene escribirlas como

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C \cos(ky) + D \sin(ky)$$

La condición  $u(x, 0) = u(x, b) = 0$  implica  $Y(0) = Y(b) = 0$ , y por lo tanto  $C = 0$ , con  $k = n\pi/b$ , real,  $n = 1, 2, \dots$ . Si exigimos que  $u$  permanezca acotada para  $x \rightarrow \infty \Rightarrow A = 0$ . Por lo tanto,

$$X(x)Y(y) = Be^{-k_n x} \sin(k_n y), \quad k_n = n\pi/b$$

y la solución general es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n x} \sin(k_n y) \quad (23)$$

La condición de contorno

$$u(0, y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n y)$$

determina los coeficientes  $A_n$ :

$$A_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin(k_n y) dy$$

La solución final puede escribirse como

$$u(x, y) = \frac{2}{b} \int_0^b \left[ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n x} \sin(k_n y) \sin(k_n y') \right] f(y') dy'$$

La serie puede en este caso evaluarse fácilmente como suma de series geométricas, escribiendo  $\sin(k_n y) = (e^{ik_n y} - e^{-ik_n y})/(2i)$  y recordando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-k_n(x+iy)} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-k(x+iy)})^n = \frac{1}{1 - e^{-k(x+iy)}}, \quad k = \pi/b$$

El resultado final es

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n x} \sin(k_n y) \sin(k_n y') = \frac{2e^{-kx} (1 - e^{-2kx}) \sin(ky) \sin(ky')}{(1 + e^{-2kx} - 2e^{-kx} \cos k(y+y'))(1 + e^{-2kx} - 2e^{-kx} \cos k(y-y'))}$$

El integrando decrece exponencialmente con  $x$  (recordar dibujo). Los factores en el denominador son la distancia al cuadrado entre los puntos de coordenadas polares  $(e^{-kx}, ky)$  y  $(1, \pm ky')$  (ver sección de variable compleja).

### 1.5 Problema del semiplano

Consideremos ahora el semiplano  $y \geq 0$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ . Resolveremos la ec.  $\Delta u = 0$  conociendo los valores de  $u$  en el eje  $x$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ . Planteando nuevamente separación de variables,  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , tenemos

$$X'' = -k^2 X, \quad Y'' = k^2 Y$$

con  $k$  constante, cuyas soluciones escribimos ahora en la forma

$$X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad Y(y) = Ae^{-ky} + Be^{ky}, \quad k \in \mathfrak{R}$$

Si queremos que  $u$  permanezca acotada para  $y \rightarrow \infty \Rightarrow A = 0$  si  $k < 0$  y  $B = 0$  si  $k > 0$ , los que podemos resumir como  $Y(y) = Ce^{-|k|y}$ . Por lo tanto,

$$X(x)Y(y) = Ce^{ikx} e^{-|k|y}$$

y la solución general (ahora  $k$  es un índice continuo) es

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} e^{-|k|y} dk \quad (24)$$

donde la integral denota valor principal. La condición de contorno

$$u(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk$$

determina ahora la función  $A(k)$ , que no es otra cosa que la transformada de Fourier de  $f(x)$  dividida por  $\sqrt{2\pi}$ . Recordando las fórmulas de inversión obtenemos

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Insertando esta expresión en (24) obtenemos

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - x', y) f(x') dx'$$

con

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - |k|y} dk = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-k[y - ix]} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{y - ix} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Obtenemos finalmente

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') dx'}{(x - x')^2 + y^2} \quad (25)$$

El denominador es nuevamente la distancia al cuadrado del punto  $(x, y)$  al punto  $(x', 0)$  del borde. Notemos que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} K(x, y) = \delta(x)$$

En efecto,  $K(x, y) > 0$  si  $y > 0$ , con  $\lim_{y \rightarrow 0^+} K(x, y) = 0$  si  $x \neq 0$  y  $\lim_{y \rightarrow 0^+} K(0, y) = \infty$ . Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

El resultado (25) puede obtenerse también directamente de la solución de Poisson para el interior del círculo, considerando un radio  $a$  muy grande y un punto  $(x, y)$  próximo a la superficie (con  $y$  medido desde el borde del círculo, recordar el dibujo), en el límite  $a \gg a - r = y$ . En tal caso,  $d^2(r, a, \theta) \rightarrow (x - x')^2 + y^2$ ,  $a^2 - r^2 = (a + r)(a - r) \rightarrow 2ay$  y  $ad\theta \rightarrow dx'$ , por lo que

$$\frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{d^2(r, a, \theta)} \rightarrow \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') dx'}{(x - x')^2 + y^2}$$

con  $f(x') = g(x'/a)$ .

El resultado (25) puede obtenerse también por función de Green y por métodos de variable compleja (ver próximas secciones).



### 1.6 Armónicos rectangulares en 3 o más dimensiones

En forma completamente análoga puede tratarse la ecuación  $\Delta u = 0$  en regiones del tipo  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$ , etc., en 3 o más dimensiones. Consideremos por ej. las condiciones de contorno

$$u(0, y, z) = u(a, y, z) = 0, \quad u(x, 0, z) = u(x, b, z) = 0$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = f(x, y)$$

Planteando una solución del tipo  $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ , obtenemos  $X''YZ + Y''XZ + Z''XY = 0$  y por lo tanto, dividiendo por  $XYZ$ ,

$$X''/X + Y''/Y + Z''/Z = 0$$

de donde

$$X'' = -k_x^2 X, \quad Y'' = -k_y^2 Y, \quad Z'' = (k_x^2 + k_y^2) Z$$

con  $k_x, k_y$  constantes. Las soluciones son de la forma

$$X(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x), \quad Y(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y),$$

$$Z(z) = E \cosh(k_z z) + F \sinh(k_z z), \quad k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Para las presentes condiciones de contorno,  $A = C = E = 0$ , por lo que la solución producto es de la forma  $\sin(k_x x) \sin(k_y y) \sinh(k_z z)$ , con  $k_x = n\pi/a$ ,  $k_y = m\pi/b$  y  $n, m$  naturales  $> 0$ . La solución general es pues

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh(k_{nm}z)$$

con  $k_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$ . La condición de contorno

$$u(x, y, c) = f(x, y) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh(k_{nm}c)$$

determina los coeficientes  $A_{nm}$  por medio del desarrollo bidimensional en serie de medio rango de senos:

$$A_{nm} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \frac{1}{\sinh(k_{nm}c)} \int_0^a dx \int_0^b dy f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

La solución para condiciones de contorno no nulas en  $c/u$  de los lados se resuelve por superposición (de 6 soluciones en 3 dimensiones).

### 1.7 Armónicos cilíndricos

Consideremos ahora la ec.  $\Delta u = 0$  en el interior de un cilindro de radio  $a$  y altura  $b$ , o sea  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq b$ . En coordenadas cilíndricas,

$$\Delta = \Delta_{(r,\theta)} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

con  $\Delta_{(r,\theta)}$  dado por (1). Planteando una solución del tipo  $u = v(r, \theta)Z(z)$  obtenemos las ecuaciones

$$Z'' = k^2 Z, \quad \Delta_{(r,\theta)} v = -k^2 v$$

La solución de la primera ecuación es

$$Z(z) = E \cosh(kz) + F \sinh(kz)$$

Escribiendo  $v = R(r)\Theta(\theta)$ , la segunda ecuación implica

$$\Theta'' = -n^2 \Theta, \quad R'' + \frac{R'}{r} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0$$

cuyas soluciones generales son

$$\Theta(\theta) = A e^{in\theta} + B e^{-in\theta}, \quad R(r) = C J_n(kr) + D Y_n(kr)$$

donde  $J_n, Y_n$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie (recordar clase respectiva). En el presente caso, la condición de  $R$  acotado para  $r \rightarrow 0$  implica  $D = 0$ , mientras que la de  $\Theta$  monovaluada,  $n$  entero.

Consideremos por ejemplo  $u = 0$  en el borde lateral ( $u(a, \theta, z) = 0$ ) e inferior ( $u(r, \theta, 0) = 0$ ), con  $u(r, \theta, b) = f(r, \theta)$ . Esto implica  $k = k_{nm}/a$ , con  $k_{nm}$  los ceros de  $J_n$  ( $J_n(k_{nm}) = 0$ ) y  $E = 0$ . Recordando que para  $n$  entero,  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ , la solución general puede pues escribirse como

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n(k_{nm}r/a) e^{in\theta} \sinh(k_{nm}z/a)$$

Para  $z = b$ , esto conduce al desarrollo de Fourier-Bessel de  $u(r, \theta, b) = f(r, \theta)$ . Recordando que

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} J_n(k_{nm} \frac{r}{a}) J_{n'}(k_{n'm'} \frac{r}{a}) e^{i\theta(n-n')} r dr d\theta = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \pi a^2 J_n'(k_{nm})^2 \quad (26)$$

obtenemos

$$A_{nm} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n(k_{nm}r/a) e^{-in\theta} r dr d\theta}{\pi a^2 J_n'(k_{nm})^2 \sinh(k_{nm}b/a)}$$

En forma análoga se resuelve el caso con dato en la base. En cambio, si el dato es  $u(a, \theta, z) = f(\theta, z)$ , con  $u(r, \theta, 0) = u(r, \theta, b) = 0$ , tenemos  $k = im\pi/b$ , con  $m$  entero, y debemos plantear una solución de la forma

$$u(r, \theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nm} I_n(m\pi r/b) e^{in\theta} \sin(m\pi z/b)$$

donde  $I_n(x) = (-i)^n J_n(ix)$  es la función de Bessel modificada de primera especie. Se obtiene un desarrollo en serie de Fourier bidimensional para  $u(a, \theta, z) = f(\theta, z)$ , dejándose los detalles como ejercicio.

## 2. METODOS DE VARIABLE COMPLEJA PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

En el caso de dos dimensiones, toda función  $u(x, y)$  armónica en una región  $R$  es la parte real o imaginaria de una función analítica en  $R$ :

$$u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)], \quad z = x + iy$$

Recordemos que  $f(z)$  es analítica si  $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$  es independiente de la dirección de  $\Delta z$ . En tal caso,  $f_x(z) = f'(z)$ ,  $f_y(z) = f'(z)i$ , lo que implica  $\Delta f = f_{xx}(z) + f_{yy}(z) = f''(z) - f''(z) = 0$ . Escribiendo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

con  $u$  y  $v$  reales, tanto  $u$  como  $v$  son entonces armónicas. La identidad  $f'(z) = f_x(z) = -if_y(z)$  conduce a las condiciones de Cauchy-Riemann,  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  de las que se desprende nuevamente que  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

Si por ej.  $u(x, y)$  representa una temperatura, las curvas  $u(x, y) = c$  son las isotermas mientras que las curvas  $v(x, y) = c'$  son las correspondientes líneas de flujo, ya que los gradientes de  $u$  y  $v$  son perpendiculares:  $(u_x, u_y) \cdot (v_x, v_y) = (u_x, u_y) \cdot (-u_y, u_x) = 0$ .

Por ejemplo, la parte real e imaginaria de  $z^k = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta)$  y  $\ln z = \ln r + i\theta$  son los armónicos circulares, mientras que las de  $e^{kz} = e^{kx}(\cos ky + i \sin ky)$ ,  $e^{ikz} = e^{-ky}(\cos kx + i \sin kx)$ , son armónicos rectangulares. Por ejemplo, en el caso del rectángulo,

$$\sin(kx) \sinh(ky) = -\operatorname{Im}[\cos(kz)] = -\frac{1}{2} \operatorname{Im}(e^{ikz} + e^{-ikz})$$

Sabemos que si  $f$  es analítica en una región  $R$  y  $C$  es una curva cerrada contenida en  $R$ ,

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Además,  $f(z)$  puede escribirse como la integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz' \quad (27)$$

donde  $C$  es cualquier curva cerrada que circunda a  $z$ , dentro de la región  $R$  donde  $f$  es analítica. De esta forma, para  $z \in R$ ,  $f(z)$  queda completamente determinada por los valores que toma  $f$  en  $C$ .

### 2.1 Solución de Poisson para el interior del círculo:

La solución de Poisson (6) puede también obtenerse a partir de (27). Si  $C$  es un círculo de radio  $a \Rightarrow z' = ae^{i\theta'}$ , con  $dz' = iz'd\theta'$  y

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z')z'}{z' - z} d\theta', \quad z' = ae^{i\theta'}, \quad |z| < a \quad (28)$$

Para obtener (6) es necesario sin embargo expresar la parte real de  $f(z)$  en términos de la parte real de  $f(z')$ . Definiendo  $z_1 = a^2/z^* = z'z'^*/z^*$ , tenemos  $|z_1| > a$  si  $|z| < a$  y entonces, para el mismo círculo  $C$ ,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z_1} dz' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z')z^*}{z^* - z'^*} d\theta' \quad (29)$$

Restando (29) de (28) obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z') \frac{|z'|^2 - |z|^2}{|z' - z|^2} d\theta' = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta'}) d\theta'}{d^2(a, r, \theta - \theta')}$$

donde  $z = re^{i\theta}$  y  $d^2(a, r, \theta - \theta') = |z' - z|^2$ . La parte real (o imaginaria) de esta expresión nos da la fórmula de Poisson (6). Notemos que

$$\frac{a^2 - r^2}{d^2(a, r, \theta - \theta')} = \frac{|z'|^2 - |z|^2}{|z' - z|^2} = \operatorname{Re}\left[\frac{z' + z}{z' - z}\right] \quad (30)$$

### 2.2 Transformaciones conformes

Recordemos que la transformación

$$w = f(z) = u + iv, \quad f'(z) \neq 0$$

con  $f(z)$  analítica, mapea una región  $R$  del plano  $z$  en una región  $S$  del plano  $w$ . La transformación se dice que es conforme pues conserva los ángulos entre curvas: para una curva  $z(t)$ , que se transforma en la curva  $w(t) = f(z(t))$ , tenemos

$$\frac{dw}{dt} = f'(z) \frac{dz}{dt}$$

y por lo tanto,  $\arg \frac{dw}{dt} = \arg[f'(z)] + \arg\left[\frac{dz}{dt}\right]$ , lo que representa una traslación de los argumentos en  $\arg[f'(z)]$  (asumiendo que  $f'(z) \neq 0$ ). No obstante, como  $|dw| = |f'(z)||dz|$ , las distancias se dilatan localmente en  $|f'(z)|$ .

Si  $g(w)$  es analítica en  $S \Rightarrow g(f(z))$  será analítica en  $R$ . Por lo tanto,  $\operatorname{Re}[g(f(z))]$  será una función armónica en  $R$ . Esto indica que una vez conocida la solución armónica  $\operatorname{Re}[g(w)]$  en  $S$ , podemos hallar la solución en  $R$  mediante una transformación conforme.

Por ejemplo, la transformación

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

mapea el rectángulo  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  en el sector circular  $1 \leq r \leq e^a$ ,  $0 \leq \theta \leq b$ . En esta región hemos visto que los armónicos son de la forma  $w^k = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta)$  para  $k \neq 0$ . Los armónicos rectangulares son pues la parte real e imaginaria de

$$(e^z)^k = e^{kz} = e^{kx}(\cos ky + i \sin ky),$$

donde  $k$  puede ser real o complejo, resultado que hemos obtenido por separación de variables (además,  $\ln w =$

$\ln r + i\theta$  y  $\frac{1}{2}\text{Im}(\ln w)^2 = \theta \ln r$  (armónicos circulares para  $k = 0$ ) se transforman en  $\ln e^z = z = x + iy$ , y  $\frac{1}{2}\text{Im}[z^2] = xy$ , que son los armónicos rectangulares para  $k = 0$ .

Como ejemplo específico, la transformación

$$w = e^{-\alpha z/b} = e^{-\alpha x/b}[\cos(\alpha y/b) - i \sin(\alpha y/b)]$$

mapea la franja semi-infinita  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq b$  en el sector circular  $0 \leq r \leq 1$ ,  $-\alpha \leq \theta \leq 0$ , donde la solución general acotada está dada por (3) con  $B_n = 0$ . La solución en la franja se obtiene pues reemplazando

$$r = |e^{-\alpha z/b}| = e^{-\alpha x/b}, \quad \theta = \arg(e^{-\alpha z/b}) = \alpha y/b$$

en (3), con  $r^{n\pi/\alpha} = e^{-n\pi x/b}$ , lo que conduce inmediatamente a la solución (23).

Como segundo ejemplo, obtendremos la fórmula (25) para la función armónica en el semiplano a partir de la fórmula de Poisson (6), utilizando una transformación conforme que mapee el semiplano superior en el interior de un círculo de radio 1. Una tal transformación es

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

En efecto, si  $z = x$  ( $y = 0$ )  $\Rightarrow |w| = \left|\frac{x-i}{x+i}\right| = 1$ . Además,  $(0, i)$  se transforma en  $(0, 0)$ , de modo que es el semiplano superior el que pasa al interior del círculo (recordemos que los llamados mapeos lineales  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad - bc \neq 0$  mapean rectas y círculos en rectas y círculos). Tenemos, para  $z' = (x', 0)$ ,

$$\begin{aligned} \text{Re}\left[\frac{w' + w}{w' - w}\right] &= \text{Re}\left[i\frac{1 + zz'}{z - z'}\right] = \frac{y(1 + x'^2)}{|z' - z|^2} \\ d\theta' &= \frac{dw'}{iw'} = \frac{2dz'}{1 + z'^2} = \frac{2dx'}{1 + x'^2} \end{aligned} \quad (31)$$

con  $|z' - z|^2 = (x - x')^2 + y^2$ . Por lo tanto, utilizando (6), (30) y las expresiones anteriores,

$$g(w(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(w') \text{Re}\left[\frac{w' + w}{w' - w}\right] d\theta' = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(w(x')) dx'}{(x - x')^2 + y^2}$$

La parte real nos da el resultado (25) para  $u(x, y) = \text{Re}[g(w(z))]$ , con  $g(w(x')) = u(x', 0) = f(x')$ .

### 3. FUNCION DE GREEN DEL LAPLACIANO

Consideremos la ec. general inhomogénea

$$-\Delta u = f(\mathbf{r}) \quad (32)$$

en una cierta región  $R$  con borde  $S$ , con la condición de contorno  $u(\mathbf{r}) = 0$  en el borde  $S$ . Sean  $u_k(\mathbf{r})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , las autofunciones *normalizadas* de  $\Delta$  en  $R$  con la anterior condición de contorno, definidas por

$$-\Delta u_k(\mathbf{r}) = \lambda_k u_k(\mathbf{r}), \quad u_k(\mathbf{r}) = 0 \text{ si } \mathbf{r} \in S \quad (33)$$

$$\int_R u_k(\mathbf{r}) u_{k'}^*(\mathbf{r}) dV = \delta_{kk'} \quad (34)$$

donde el autovalor  $\lambda_k$  es real y positivo (asumiendo  $R$  finito). Podemos expandir la solución  $u$  de (32) y la carga o fuente  $f(\mathbf{r})$  en la forma

$$u(\mathbf{r}) = \sum_k c_k u_k(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r}) = \sum_k f_k u_k(\mathbf{r})$$

con

$$c_k = \int_R u_k^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) dV, \quad f_k = \int_R u_k^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) dV$$

Además, utilizando dos veces la identidad de Green,

$$\int_R u_k^* \Delta u dV = \int_S (u_k^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_k^*}{\partial n}) dA + \int_R u \Delta u_k^* dV \quad (35)$$

$$= \int_S (u_k^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_k^*}{\partial n}) dA - \lambda_k c_k \quad (36)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial n}$  denota derivada normal.

La integral de área se anula si  $u_k(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) = 0$  en  $S$ . Multiplicando la ec. (32) por  $u_k^*(\mathbf{r})$  e integrando, obtenemos entonces

$$\lambda_k c_k = f_k \quad (37)$$

de donde

$$c_k = f_k / \lambda_k$$

La solución puede pues expresarse como

$$u(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{f_k u_k(\mathbf{r})}{\lambda_k} = \int_R G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV' \quad (38)$$

donde

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_k \frac{u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}')}{\lambda_k} \quad (39)$$

es la *función de Green*. Si  $f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \Rightarrow u(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ , por lo que la función de Green queda definida por la ecuación

$$-\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \text{ si } \mathbf{r} \in S \quad (40)$$

con  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in R$ .  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es pues el potencial electrostático o temperatura en  $\mathbf{r}$  originado por una carga o fuente puntual en  $\mathbf{r}'$ , que se anula en el borde  $S$  (lo que corresponde a un borde conectado a tierra para el potencial o mantenido a temperatura 0). Notemos que

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

(pues  $G$  es real) de modo que la temperatura en  $\mathbf{r}$  debida a una fuente en  $\mathbf{r}'$  es igual a la temperatura en  $\mathbf{r}'$  debida a una fuente en  $\mathbf{r}$ , independientemente de la forma de  $R$  o de las simetrías geométricas particulares del problema. Esto es consecuencia del caracter autoadjunto de  $\Delta$ .

Matemáticamente,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  puede considerarse el núcleo (kernel) en la base de coordenadas del operador lineal integral  $G$ , el cual es el inverso del operador diferencial  $-\Delta$ . Escribiendo  $u(\mathbf{r}) = \int_R \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')u(\mathbf{r}')dV'$ , la acción de  $\Delta$  sobre  $u$  puede expresarse como

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \int_R \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')u(\mathbf{r}')dV', \quad \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Delta\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Expandiendo en la base de autofunciones,  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_k a_k u_k(\mathbf{r})$ , obtenemos  $a_k = \int_R u_k^*(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dV = u_k^*(\mathbf{r}')$  y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \sum_k u_k(\mathbf{r})u_k^*(\mathbf{r}') \\ \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\sum_k \lambda_k u_k(\mathbf{r})u_k^*(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (41)$$

en concordancia con la expansión (39). En la base de autofunciones,  $\Delta$  y  $G$  quedan pues representados por “matrices” diagonales de elementos  $\Delta_{kk'} = -\lambda_k \delta_{kk'}$ ,  $G_{kk'} = \frac{1}{\lambda_k} \delta_{kk'}$ , mientras que  $\delta$  queda representado por la matriz identidad (de elementos  $\delta_{kk'}$ ). De esta forma,  $G = \Delta^{-1}$ . En esta base,  $u$  y  $f$  quedan representado por vectores columna de elementos  $u_k$ ,  $f_k$ , y la ec. diferencial (32) por la ec. matricial  $\sum_{k'} \Delta_{kk'} c_{k'} = f_k$ , que conduce a la ec. (37).

Mediante la función de Green es posible también resolver la ec. de Laplace conociendo los valores de  $u$  en el borde,

$$\Delta u = 0, \quad u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \text{ si } \mathbf{r} \in S \quad (42)$$

Multiplicando nuevamente la ec. anterior por  $u_k^*(\mathbf{r})$  e integrando, obtenemos, utilizando (36),

$$\int_R u_k^* \Delta u dV = - \int_S g(\mathbf{r}) \frac{\partial u_k^*}{\partial n} dA - \lambda_k c_k = 0$$

de donde

$$c_k = -\frac{1}{\lambda_k} \int_S g(\mathbf{r}) \frac{\partial u_k^*}{\partial n} dA$$

La solución puede pues expresarse como

$$u(\mathbf{r}) = - \int_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} g(\mathbf{r}') dA'$$

con

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} u_k(\mathbf{r}) \frac{\partial u_k^*(\mathbf{r}')}{\partial n'}$$

la derivada normal (respecto de  $\mathbf{r}'$ ) de la función de Green. La solución formal al problema general

$$-\Delta u = f(\mathbf{r}), \quad u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \text{ si } \mathbf{r} \in S$$

es entonces

$$u(\mathbf{r}) = \int_R G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV' - \int_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} g(\mathbf{r}') dA'$$

Las mismas expresiones rigen si reemplazamos  $\Delta$  por un operador  $L = -\Delta + q(\mathbf{r})$ , con  $q$  derivable en  $R$ , siempre y cuando  $L$  no posea autovalores nulos (lo cual queda garantizado si  $q(\mathbf{r}) > 0$  en  $R$ ). En tal caso  $u_k(\mathbf{r})$  son las autofunciones de  $L$ . Véase también Apéndice I.

Como ejemplo directo de la expansión en autofunciones (39), la función de Green para el rectángulo  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  es

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_n x) \sin(k_n x') \sin(l_m y) \sin(l_m y')}{k_n^2 + l_m^2} \\ &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_n x) \sin(k_n x') \sinh(k_n y) \sinh[k_n(b - y')]}{k_n \sinh(k_n b)} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y')$ ,  $k_n = n\pi/a$ ,  $l_m = m\pi/b$ ,  $n, m = 1, 2, \dots$  y la última expresión es válida para  $y < y'$ . Hemos utilizado los métodos dados en el apéndice para evaluar la suma sobre  $m$ . Reobtenemos así el resultado (22) para el problema del rectángulo.

### 3.1 Funciones de Green en 3 y 2 dimensiones

Consideremos ahora el espacio completo tridimensional. Las autofunciones normalizadas de  $\Delta$  son

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}}$$

con  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$  y satisfacen

$$\begin{aligned} -\Delta u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= k^2 u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad k^2 = |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \\ \int u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) d^3 k &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} d^3 k = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned}$$

donde la integral denota valor principal sobre todo el espacio,  $d^3 k = dk_x dk_y dk_z$  y

$$\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$$

La función de Green es por lo tanto

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{k}|^2} d^3 k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} k^2 dk \int_0^{\pi} \frac{e^{ikr \cos(\theta)}}{k^2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(kr)}{kr} dk = \frac{1}{4\pi r} \end{aligned} \quad (43)$$

donde  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = kr \cos \theta$  y hemos utilizado el resultado (deducido al introducir transf. de Fourier)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

El resultado (43) puede obtenerse en forma más simple y física a partir del teorema de Gauss (o sea, la identidad de Green (35) para  $u_k = 1$ ). Obviamente, debido a

la invariancia traslacional y rotacional de  $\Delta$ , en el espacio completo  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  será una función únicamente de la distancia  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , es decir,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

Considerando ahora una esfera  $R$  centrada en el origen de radio  $r > 0$  arbitrario, a partir de  $-\Delta G = \delta(\mathbf{r})$  obtenemos, dado que  $\int_R \delta(\mathbf{r}) dV = 1$ ,

$$-\int_R \Delta G dV = -\int_S \frac{\partial G}{\partial n} dA = -G'(r)4\pi r^2 = 1$$

de donde  $G'(r) = -1/(4\pi r^2)$  y

$$G(r) = \frac{1}{4\pi r}$$

donde hemos impuesto la condición de contorno  $\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0$ . Notemos que  $\frac{1}{r}$  es la única función armónica en 3 dimensiones independiente de  $\Omega$  (además de la constante), de modo que necesariamente  $G(r) \propto r^{-1}$  para  $r > 0$  dado que  $\Delta G(r) = 0$  si  $r > 0$ .

En dos dimensiones, procediendo de la misma manera obtenemos  $-G'(r)2\pi r = 1$ , de donde  $G'(r) = -\frac{1}{2\pi r}$  y

$$G(r) - G(r_0) = -\frac{\ln(r/r_0)}{2\pi}, \quad r > 0$$

Recordemos que en 2 dimensiones,  $\ln r$  es la única función armónica (además de una constante) independiente de  $\theta$ . No es entonces posible satisfacer la condición  $G(r) < \infty$  (y por lo tanto  $G(r) \rightarrow 0$ ) para  $r \rightarrow \infty$ . Lo mismo ocurre en una dimensión, donde, a partir de  $-G'(r)2 = 1$  obtenemos  $G(r) - G(r_0) = -\frac{1}{2}(r - r_0)$  (o sea,  $G(x, x') = -\frac{1}{2}|x - x'| + c$ ).

Generalización a  $n \geq 3$  dimensiones: Utilizando el teorema de Gauss en la forma anterior para una hipersfera  $R$  centrada en el origen, obtenemos  $-\int_R \Delta G dV_n = -\int_S \frac{\partial G}{\partial n} dV_{n-1} = -G'(r)\alpha_n r^{n-1} = 1$ , donde

$$\alpha_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$$

es el área de la superficie de la hipersfera de radio 1 ( $\alpha_2 = 2\pi$ ,  $\alpha_3 = 4\pi$ ,  $\alpha_4 = 2\pi^2$ ). Por lo tanto, imponiendo  $\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0$  se obtiene

$$G(r) = \frac{1}{\alpha_n(n-2)r^{n-2}}, \quad n > 2$$

### 3.2 Función de Green para el semiplano

En general, la función de Green para una región  $R$  puede obtenerse sumando a la función de Green para el espacio completo una función  $u$  armónica en  $R$  ( $\Delta u = 0$  en  $R$ ) tal que la suma satisfaga la condición de contorno  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$  si  $\mathbf{r} \in S$ . Por su puesto,  $u$  no tiene por que ser armónica fuera de  $R$ .

Coconsideremos por ejemplo el semiplano  $y > 0$  en dos dimensiones. La función de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , con  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y')$ , y  $y, y' > 0$  debe anularse sobre el eje  $x$  ( $y = 0$ ). Esto puede lograrse mediante el método de las imágenes, colocando, además de la fuente puntual en  $(x', y')$  con "carga" 1, otra (virtual) en  $(x', -y')$  con carga -1. Así,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi}[\ln d_+ - \ln d_-] = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{d_+}{d_-} \quad (44)$$

$$d_{\pm}^2 = (x - x')^2 + (y \mp y')^2 \quad (45)$$

Si  $y = 0$ ,  $d_+ = d_-$  y  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ . Ahora  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  no es más una función de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = d_+$  únicamente, ya que la región no es invariante ante traslaciones sobre el eje  $y$ .

La derivada normal en  $y' = 0$  es

$$-\left. \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial y'} \right|_{y'=0} = \frac{-1}{\pi} \frac{y}{d^2}, \quad d^2 = (x - x')^2 + y^2$$

con  $d$  la distancia de  $\mathbf{r}$  al punto  $\mathbf{r}' = (x', 0)$  sobre el eje  $x$ . La solución de la ec.  $\Delta u = 0$  para  $y > 0$ , con  $u(x, 0) = f(x)$  es pues

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial y'} \Big|_{y'=0} f(x') dx' = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') dx'}{(x - x')^2 + y^2}$$

que coincide con el resultado (25) obtenido por separación de variables.

La ventaja de este método es que puede aplicarse directamente en 3 o más dimensiones. Para la región  $z > 0$  en 3 dimensiones, obtenemos, de la misma manera,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{d_+} - \frac{1}{d_-} \right], \quad (46)$$

$$d_{\pm}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z \mp z')^2$$

la cual se anula en  $z' = 0$ , y

$$\left. \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z'} \right|_{z'=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{d^3}, \quad d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2$$

siendo  $d$  la distancia de  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  a  $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ . La solución de la ec.  $\Delta u = 0$  para  $z > 0$ , con  $u(x, y, 0) = f(x, y)$  es

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x', y') dx' dy'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

En  $n$  dimensiones, procediendo en forma análoga se obtiene  $\frac{\partial G}{\partial x'_n} \Big|_{x'_n=0} = \frac{2}{\alpha_n} \frac{x_n}{d^n}$ , con  $d$  la distancia de  $\mathbf{r}$  al punto  $\mathbf{r}'$  sobre el eje  $x_n = 0$ .

El resultado (46) puede también obtenerse mediante la expansión (39) en las autofunciones

$$u_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(k_z z)$$

lo que da lugar a la representación integral

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_0^{\infty} dk_z \frac{e^{i(k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z z)} \sin(k_z z) \sin(k_z z')}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

Se dejan los detalles como ejercicio.

### 3.3 Función de Green para el interior de la esfera y círculo

La forma más rápida de obtener la función de Green en el círculo o esfera  $r < a$  es nuevamente utilizando el método de las imágenes. Consideremos primero el caso de la esfera. Colocando una carga  $+1$  en  $\mathbf{r}'$ , con  $|\mathbf{r}'| = r' < a$ , y una carga virtual  $-\frac{a}{r'}$  en  $\mathbf{r}'' = \frac{a^2}{r'^2} \mathbf{r}'$ , con  $|\mathbf{r}''| = r'' = \frac{a^2}{r'} > a$ , obtenemos

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{d} - \frac{a}{r'} \frac{1}{d'} \right] \quad (47)$$

donde  $d, d'$  son las distancias de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{r}'$  y  $\mathbf{r}''$ :

$$d^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta_0, \quad d'^2 = r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos \theta_0$$

con  $r = |\mathbf{r}|$  y  $\theta_0$  el ángulo entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$ . De esta forma, si  $\mathbf{r}$  está en el borde de la esfera,  $r = a$ , y los triángulos  $(0, \mathbf{r}', \mathbf{r})$  y  $(0, \mathbf{r}, \mathbf{r}'')$  son semejantes (pues tienen un ángulo en común y  $r'/a = a/r''$ ; recordar dibujo hecho en clase), por lo que  $d/d' = r'/a$  y  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ . Si  $r' \rightarrow 0$ ,  $d \rightarrow r$  y  $d' \rightarrow \infty$ , con  $r'd' \rightarrow a^2$ , obteniéndose

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (48)$$

Analogamente, en el caso del círculo,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{2\pi} \left[ \ln d - \ln \frac{d'r'}{a} \right] = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{da}{d'r'} \quad (49)$$

Si  $r' \rightarrow 0$ ,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r/a) \quad (50)$$

En ambos casos,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es de la forma  $f(d) - f(d'r'/a)$ .

Evaluemos ahora la derivada normal en  $r' = a$  (en cuyo caso  $d = d'$ , y  $r' = r'' = a$ ). Obtenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'} \right|_{r'=a} &= f'(d) \left[ \frac{\partial d}{\partial r'} - \frac{r'}{a} \frac{\partial d'}{\partial r'} - \frac{d}{a} \right] \\ &= f'(d) \frac{2a^2 - d^2 - 2ar \cos \theta}{da} = f'(d) \frac{a^2 - r^2}{da} \end{aligned} \quad (51)$$

donde  $\left. \frac{\partial d}{\partial r'} \right|_{r'=a} = -\left. \frac{\partial d'}{\partial r'} \right|_{r'=a} = (a - r \cos \theta_0)/d$ .

En el caso de la esfera,  $f'(d) = -1/(4\pi d^2)$  y la solución al problema  $\Delta u = 0$  para  $r < a$ , con  $u(a, \Omega) = f(\Omega)$  es, reemplazando  $dA = a^2 d\Omega'$ ,

$$u(r, \Omega) = - \int_S \frac{\partial G}{\partial r'} f(\Omega') dA = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int_S \frac{f(\Omega') d\Omega'}{d^3(a, r, \theta_0)}$$

con  $\theta_0$  dado por (15). Volvemos a obtener la solución (20) obtenida por separación de variables.

Para el círculo,  $f'(d) = -1/(2\pi d)$  y la solución al problema  $\Delta u = 0$  para  $r < a$ , con  $u(a, \theta) = f(\theta)$  es, reemplazando  $dA = ad\theta'$ ,

$$u(r, \theta) = - \int_S \frac{\partial G}{\partial r'} f(\theta') dA = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta') d\theta'}{d^2(a, r, \theta_0)}$$

con  $\theta_0 = \theta - \theta'$ , que coincide con (6). El caso  $n$  dimensional se trata en forma similar.

En el caso bidimensional, la función de Green para una región  $R$  arbitraria puede hallarse mediante una transformación conforme  $w = f(z)$  que mapee  $R$  en el interior del círculo unidad. Más aún, si se mapea  $z'$  en el origen, utilizando (50) vemos que la función de Green será directamente

$$G(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln |w|$$

Por ejemplo, (49) puede obtenerse de (50) mediante la transformación conforme

$$w = a \frac{z - z'}{z z'^* - a^2}, \quad |z'| < a$$

que mapea  $z'$  a 0 y el círculo  $|z| < a$  en el círculo  $|w| < 1$  (si  $z = ae^{i\theta}$ ,  $|w| = \left| \frac{ae^{i\theta} - z'}{z'^* e^{-i\theta} - a} \right| = 1$ ). En efecto,

$$|w| = \frac{a|z - z'|}{|z'^*||z - a^2/z'^*|} = \frac{ad}{r'd'}$$

donde  $d = |z - z'|$ ,  $d' = |z - a^2/z'^*|$ ,  $r' = |z'|$ .

### 3.4 Función de Green para el problema de Neumann

Consideremos ahora el problema

$$-\Delta u = f(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(\mathbf{r}) \text{ si } \mathbf{r} \in S \quad (52)$$

Físicamente, es la ecuación que determina la temperatura estacionaria en una región  $R$  cuando existe un flujo determinado de calor a través de la superficie  $S$ , y fuentes internas de calor representadas por  $f(\mathbf{r})$ . Obviamente, para que exista solución estacionaria, es necesario que el flujo total de calor a través de  $S$  sea igual (y opuesto) al proporcionado por  $f$  en todo el volumen. Matemáticamente, esto es consecuencia de la aplicación de la identidad de Green,

$$\int_S g(\mathbf{r}) dA = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} dA = \int_R \Delta u dV = - \int_R f(\mathbf{r}) dV \quad (53)$$

Esto es una condición necesaria para la existencia de solución. Por otro lado, es claro que la solución, si existe, no es única, pues puede sumarse una constante arbitraria:

Si  $u(\mathbf{r})$  es solución  $\Rightarrow u(\mathbf{r}) + c$  es también solución. La constante  $c$  es de hecho una autofunción de  $\Delta$  para el problema de Neumann homogéneo, con autovalor 0:

$$-\Delta u_k(\mathbf{r}) = \lambda_k u_k(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial u_k}{\partial n} = 0 \text{ si } \mathbf{r} \in S \quad (54)$$

El autovalor mas bajo es  $\lambda_0 = 0$  y corresponde a la autofunción normalizada  $u_0(\mathbf{r}) = 1/\sqrt{V}$ , donde  $V = \int_R dV$  es el volumen de  $R$ . Por ortogonalidad con  $u_0$ , el resto de las autofunciones tendrá valor medio nulo:

$$\frac{1}{V} \int_R u_k(\mathbf{r}) dV = 0, \quad k \neq 0$$

Consideremos primero el caso  $g(\mathbf{r}) = 0$  (o sea,  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  en  $S$ ), que corresponde a un borde térmicamente aislante. La condición necesaria de existencia de solución estacionaria es que el calor total suministrado en el interior sea 0:

$$\int_R f(\mathbf{r}) dV = 0 \quad (55)$$

En tal caso, podemos escribir  $u(\mathbf{r}) = \sum_k \lambda_k c_k u_k(\mathbf{r})$ ,  $f(\mathbf{r}) = \sum_k f_k u_k(\mathbf{r})$ , con  $u_k(\mathbf{r})$  las autofunciones determinadas por (54) y

$$c_k = \int_R u(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}) dV, \quad f_k = \int_R f(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}) dV$$

La condición (55) implica

$$f_0 = \int_R f(\mathbf{r}) u_0^*(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_R f(\mathbf{r}) dV = 0$$

Multiplicando la ec. (52) por  $u_k^*(\mathbf{r})$  y utilizando (36), obtenemos

$$\lambda_k c_k = f_k$$

Como  $\lambda_0 = f_0 = 0$  y  $\lambda_k \neq 0$  si  $k \neq 0$ , tenemos

$$c_k = f_k / \lambda_k, \quad k > 0, \quad c_0 \text{ arbitrario}$$

La solución puede por lo tanto escribirse como

$$u = \int_R N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV + c$$

donde

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{k>0} \frac{u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}')}{\lambda_k}$$

es la función de Neumann, y  $c$  una constante arbitraria, igual al valor medio  $\frac{1}{V} \int_R u(\mathbf{r}) dV$ .

$N$  está definida por la ecuación

$$-\Delta N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{V}, \quad \frac{\partial N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S$$

donde hemos sustraído a la fuente puntual su valor medio:

$$\frac{1}{V} \int_R \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \frac{1}{V}$$

de forma que  $\int_V [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{V}] dV = 0$ . Notemos que

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{V} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - u_0(\mathbf{r}) u_0^*(\mathbf{r}') = \sum_{k>0} u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}')$$

Resolvamos ahora el problema general (52). Utilizando (36) obtenemos

$$\lambda_k c_k = f_k + g_k, \quad g_k = \int_S u_k^*(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) dA$$

donde la condición (53) implica

$$f_0 + g_0 = 0$$

Por lo tanto,

$$c_k = \frac{f_k + g_k}{\lambda_k}, \quad k > 0, \quad c_0 \text{ arbitrario}$$

Obtenemos finalmente

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV + \int_S N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') dA + c$$

donde  $c = \frac{1}{V} \int_V u(\mathbf{r}) dV$  es una constante arbitraria.

Como ejemplo directo, en el caso de un rectángulo  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2}{ab} \sum_{n,m} \alpha_{nm} \frac{\cos(k_n x) \cos(k_n x') \cos(l_m y) \cos(l_m y')}{k_n^2 + l_m^2}$$

donde  $k_n = n\pi/a$ ,  $l_m = m\pi/b$ , con  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ , y  $\alpha_{nm} = 2 - \delta_{n0} - \delta_{m0}$  (o sea,  $\alpha_{00} = 0$ ,  $\alpha_{0m} = \alpha_{n0} = 1$ ,  $\alpha_{nm} = 2$  si  $n > 0$ ,  $m > 0$ ).

Se dejan otros casos como ejercicio.

## APENDICE I: FUNCIÓN DE GREEN

Examinaremos aquí la evaluación de algunos desarrollos en autofunciones de la función de Green obtenidos de la expresión general (39). Habíamos visto que en una dimensión la función de Green del operador de Sturm Liouville  $L[u] = -(p(x)u')' + q(x)u$  en el intervalo  $[0, a]$ , con la condición de contorno  $G(0, x') = G(a, x') = 0$ , es

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(x')}{w}, & x < x' \\ \frac{u_1(x')u_2(x)}{w}, & x' < x \end{cases} \quad w = -p(u_1 u_2' - u_1' u_2)$$

donde  $L[u_1] = L[u_2] = 0$ , con  $u_1(0) = u_2(a) = 0$ , en cuyo caso  $w$  es constante. Notemos que  $G(x, x') = G(x', x)$ .

Por ejemplo, la función de Green para el operador  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  en el intervalo  $[0, a]$  es

$$G(x, x') = \begin{cases} x(a-x')/a, & 0 < x < x' < a \\ x'(a-x)/a, & 0 < x' < x < a \end{cases} \quad (56)$$

Por otro lado, el desarrollo en autofunciones (39) conduce a

$$G(x, x') = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/a) \sin(n\pi x'/a)}{(n\pi/a)^2}$$

de modo que para  $0 < x < x' < a$ ,

$$\frac{x(a-x')}{a} = \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/a) \sin(n\pi x'/a)}{n^2}, \quad (57)$$

lo que puede verificarse directamente efectuando el desarrollo en serie de Fourier de (56).

Para el operador  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + k^2$  obtenemos

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{\sinh(kx) \sinh(k(a-x'))}{k \sinh(ka)}, & 0 < x < x' < a \\ \frac{\sinh(kx') \sinh(k(a-x))}{k \sinh(ka)}, & 0 < x' < x < a \end{cases} \quad (58)$$

mientras que el desarrollo (39) conduce a

$$G(x, x') = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/a) \sin(n\pi x'/a)}{k^2 + (n\pi/a)^2}$$

de modo que para  $0 < x < x' < a$ ,

$$\frac{\sinh(kx) \sinh(k(a-x'))}{k \sinh(ka)} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/a) \sin(n\pi x'/a)}{k^2 + (n\pi/a)^2},$$

lo que puede también verificarse mediante el desarrollo en serie de Fourier de (58). Para  $k \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\sinh(kx) \sinh(k(a-x'))}{k \sinh(ka)} \rightarrow \frac{kx(k(a-x'))}{k^2 a} = x(a-x')/a$$

recuperándose el resultado (57).

Para el círculo  $r < a$ , recordando el resultado (49) obtenemos la identidad

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{-1}{2\pi} \ln \frac{da}{d'r'} \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(k_{nm}r/a) J_n(k_{nm}r'/a) e^{in(\theta-\theta')}}{k_{nm}^2 (J'_n(k_{nm}))^2} \end{aligned}$$

donde  $k_{nm}$  son los ceros de la función de Bessel,  $J_n(k_{nm}) = 0$  y, en coordenadas polares,  $\mathbf{r} = (r, \theta)$ ,  $\mathbf{r}' = (r', \theta')$ , con  $d$  la distancia de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{r}'$  y  $d'$  la de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{r}'' = \frac{a^2}{r'^2} \mathbf{r}'$ .

## Solución General

La solución del problema general de Dirichlet

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{r}}(u) &= f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R, \quad u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \\ L_{\mathbf{r}}(u) &= -\Delta_{\mathbf{r}}u + q(\mathbf{r})u \end{aligned}$$

puede expresarse en términos de la función de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , definida por

$$L_{\mathbf{r}}(G) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in R, \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r} \in S \quad (59)$$

como

$$u(\mathbf{r}) = \int_R G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV' - \int_S \frac{\partial G}{\partial n'} g(\mathbf{r}') dA' \quad (60)$$

donde  $n'$  es la dirección normal hacia afuera. Hemos por su puesto asumido que la solución de (59) existe. La expresión (60) se puede demostrar utilizando el desarrollo en autofunciones de  $L$  con condiciones de contorno homogéneas, tal como se realizó en la sec. 3.  $G$  vuelve a estar dado entonces por la expresión (39). Se puede llegar también a (60) directamente de (59), intercambiando  $\mathbf{r}$  por  $\mathbf{r}'$ , multiplicando luego (59) por  $u(\mathbf{r}')$  e integrando finalmente sobre  $R$  respecto de  $\mathbf{r}'$ , utilizando el teorema de Green y la simetría  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \int_R \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) u(\mathbf{r}') dV' = \int_R L_{\mathbf{r}'}[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] u(\mathbf{r}') dV' \\ &= \int_S \left[ -\frac{\partial G}{\partial n'} u(\mathbf{r}') + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u}{\partial n'} \right] dA' + \int_R G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') L_{\mathbf{r}'}[u(\mathbf{r}')] dV' \\ &= - \int_S \frac{\partial G}{\partial n'} g(\mathbf{r}') dA' + \int_R G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV' \end{aligned}$$

donde en la última línea se ha utilizado la condición de contorno homogénea de  $G$  y el valor de  $u$  en el borde.

## Apéndice II: Autofunciones de $\Delta$ en la esfera

Consideremos la ecuación

$$-\Delta u = \lambda u$$

en un región  $b \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Mediante separación de variables  $u(r, \Omega) = R_l(r) Y_{lm}(\Omega)$ , donde  $\Omega = (\theta, \phi)$ , se obtiene para  $R_l(r)$  la ecuación

$$R_l'' + \frac{2}{r} R_l' + \left[ \lambda - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0$$

Mediante la sustitución  $R_l(r) = r^{-1/2} \tilde{R}_l(r)$  se obtiene la ecuación de Bessel (recordar detalles de clase)

$$\tilde{R}_l'' + \frac{1}{r} \tilde{R}_l' + \left[ \lambda - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right] \tilde{R}_l = 0$$

cuya solución general es

$$\tilde{R}_l(r) = \tilde{A}_l J_{l+1/2}(kr) + \tilde{B}_l Y_{l+1/2}(kr), \quad k = \sqrt{\lambda}$$



Por lo tanto,

$$R_l(r) = r^{-1/2} \tilde{R}_l(r) = A_l j_l(kr) + B_l y_l(kr)$$

donde  $A_l = \sqrt{2k/\pi} \tilde{A}_l$ ,  $B_l = \sqrt{2k/\pi} \tilde{B}_l$  y

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{l+1/2}(x)}{\sqrt{x}}, \quad y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Y_{l+1/2}(x)}{\sqrt{x}},$$

son las denominadas *funciones de Bessel esféricas*. Dado que  $J_\nu(x) \propto x^\nu$  para  $x \rightarrow 0$ ,  $j_l(x)$  permanece finita para  $x \rightarrow 0$ . Puede verse a partir de la definición de las funciones de Bessel que

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}, \quad y_0(kr) = -\frac{\cos kr}{kr}$$

Estas son pues las dos soluciones LI con simetría esférica ( $l = 0$ ). En particular,  $-y_0(kr) \pm i j_0(kr) = e^{\pm ikr}/r$ . En general, puede demostrarse que

$$j_l(x) = x^l \left( \frac{-1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin(x)}{x}, \quad y_l(x) = x^l \left( \frac{-1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{-\cos(x)}{x}.$$

En todo  $\mathfrak{R}^3$   $k$  es real arbitrario. En cambio, en una esfera de radio  $a$  ( $b = 0$ ) con la condición de contorno  $R_l(a) = 0$  tendremos  $B_l = 0$  y  $j_l(ka) = 0$ , por lo que  $k = k_l^n/a$ , siendo  $k_l^n$  el  $n$ -ésimo 0 de  $j_l(x)$ . Los autovalores son en tal caso  $\lambda_l^n = (k_l^n)^2/a^2$ , con autofunciones  $u_{nlm}(r, \Omega) = j_l(k_l^n r/a) Y_{lm}(\Omega)$ .