

Mecánica cuántica II

Oswaldo Civitarese, Juan Mauricio Matera

January 10, 2019

Contents

1	El campo electromagnético como sistema mecánico.	2
1.1	Grados de Libertad del Electromagnetismo Clásico.	2
1.2	Variables coordenada-momento (cuadraturas)	2
1.3	Acoplamiento con distribuciones de carga. Gauge de Coulomb . .	6
1.4	Invarianza de Gauge	7
2	Cuantización del campo y operadores de creación y aniquilación	7
2.1	El Hamiltoniano del campo electromagnético libre.	7
2.2	Relaciones de conmutación de los operadores de campo	9
2.3	Autoestados de \mathbf{H}_{EM}	10
2.4	Estados Coherentes	13
2.5	Simetrías y cantidades conservadas.	14
2.5.1	Cantidad de Movimiento	14
2.5.2	Momento angular	15
2.5.3	Paridad	16
2.5.4	Helicidad	17
3	Excitaciones elementales. Fotones	17
3.1	Estados de momento angular total definido	20
3.1.1	Armónicos Esféricos escalares y esféricos armónicos vec- toriales	20
4	Vertices Elementales	25
4.1	Apéndice: El momento angular como función de los operadores de subida y bajada	26

Notación:

Vectores tridimensionales con “flechita” \vec{x} , \vec{r} . Versores con “sombrito” \hat{e}_x
Tetravectores en notación covariante (x^μ) Operadores en negrita: \mathbf{H} , \mathbf{c} , $\mathbf{\hat{A}}$, \mathbf{x}^μ

1 El campo electromagnético como sistema mecánico.

1.1 Grados de Libertad del Electromagnetismo Clásico.

Consideremos las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético en el “gauge” transversal en ausencia de cargas ($j = 0, \rho = 0$):

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3)$$

Si consideramos un volumen cúbico grande pero finito Ω , de volumen V , con condiciones de borde *periodicas*¹ las soluciones de $\vec{A}(\mathbf{r}, t)$ puede expandirse en términos de sus componentes de Fourier espaciales

$$\vec{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \vec{a}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \mathbf{r}} + \vec{a}_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4)$$

donde $\vec{k} = \frac{2\pi}{V^{1/3}}(n_x, n_y, n_z)$, con n_x, n_y, n_z números enteros y $\vec{a}_{\vec{k}}(t)$ son vectores con componentes en general complejas y que, debido a la condición de *transversalidad* (2), deben ser ortogonales a \vec{k} . Por otro lado, para ser soluciones de la Ec. de onda (1), $\vec{a}_{\vec{k}}(t) \propto e^{-i\omega t}$, con $\omega = |\vec{k}|c$. Una determinada configuración del campo $\vec{A}(\vec{r}, t)$ queda entonces determinada por los valores de las componentes $\vec{a}_{\vec{k}}(t)$, y en ese sentido, estas se comportan como las variables que definen el estado del campo en un cierto instante t .

1.2 Variables coordenada-momento (cuadraturas)

Para encontrar el equivalente cuántico del campo $\vec{A}(\vec{r}, t)$, es conveniente introducir las variables de coordenadas/momentos definidas como

$$\begin{aligned} \vec{q}_{\vec{k}}(t) &= \frac{\vec{a}_{\vec{k}}(t) + \vec{a}_{\vec{k}}^*(t)}{\sqrt{4\pi}} \\ \vec{p}_{\vec{k}}(t) &= \omega(\vec{k}) \frac{\vec{a}_{\vec{k}}(t) - \vec{a}_{\vec{k}}^*(t)}{i\sqrt{4\pi}} \end{aligned}$$

Como $\vec{a}_{\vec{k}}(t)$ ($\vec{a}_{\vec{k}}^*(t)$) son soluciones de la ecuación de onda con frecuencias positivas (negativas), observamos que estas variables satisfacen las ecuaciones de

¹Aquí asumimos que las configuraciones de campo que consideraremos se anulan fuera de una cierta región compacta contenida en Ω . La elección de las condiciones de borde “periodicas” es por conveniencia, ya que estas incluyen todas las soluciones que se anulan en el borde, sin perder la invarianza traslacional presente en el problema libre.

²Nótese que si bien $\omega = -|\vec{k}|c$ también es solución, esta queda incluida automáticamente vía el término conjugado asociado a la solución con $\omega > 0$ y $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$

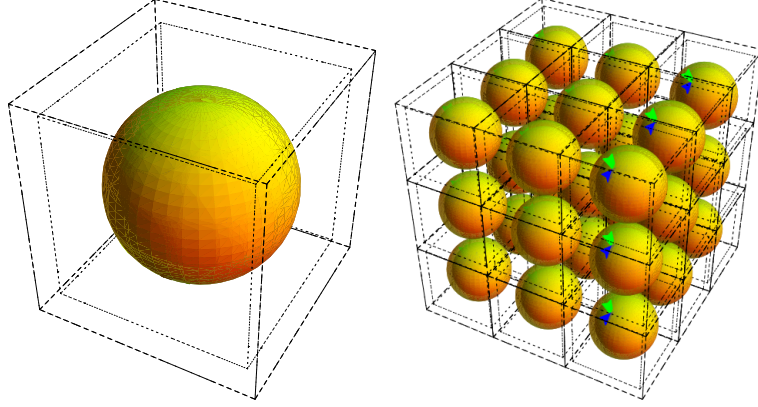


Figure 1: Posibles elecciones de las condiciones de borde para los campos electro-magnéticos. Si consideramos sólo configuraciones con soporte contenido dentro de un cierto volumen cúbico Ω , es posible expandir las soluciones en términos de soluciones que se anulen sobre un cubo que lo contenga (izq) o como funciones periódicas de período $V_\Omega^{1/3}$. Si bien en ambos casos el conjunto total de soluciones posibles será distinto, en el límite de volúmenes grandes, ambas descripciones son equivalentes al considerar campos con un soporte finito.

movimiento

$$\frac{d\vec{q}_{\vec{k}}}{dt} = \vec{p}_{\vec{k}} \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{p}_{\vec{k}}}{dt} = -\omega(\vec{k})^2 \vec{q}_{\vec{k}} \quad (6)$$

que recuerdan a las de un conjunto de osciladores armónicos desacoplados (donde la masa se fija a 1). Respecto a estas variables, el potencial vector $\vec{A}(\vec{r}, t)$ toma la forma (Ejercicio)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k}} \left(\vec{q}_{\vec{k}}(t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) - \frac{1}{\omega(\vec{k})} \vec{p}_{\vec{k}}(t) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right) \quad (7)$$

Conviene ahora construir las expresiones correspondientes a los campos eléctrico ($\vec{E}(\vec{r}, t)$) y magnético ($\vec{B}(\vec{r}, t)$). Para esto, recordamos que

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k}} \left(\vec{p}_{\vec{k}}(t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) + \omega(\vec{k}) \vec{q}_{\vec{k}}(t) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right) \quad (8)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0 V}} \sum_{\vec{k}} \left(\vec{k} \times \vec{q}_{\vec{k}}(t) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) + \frac{\vec{k}}{\omega(\vec{k})} \times \vec{P}_{\vec{k}}(t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right) \quad (9)$$

La energía asociada a estos campos viene dada por

$$U = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2}{2} d\Omega$$

donde nuevamente, Ω es el cubo de volumen V , en el que asumimos existían los campos. Remplazando las expresiones (8) -Ejercicio - obtenemos

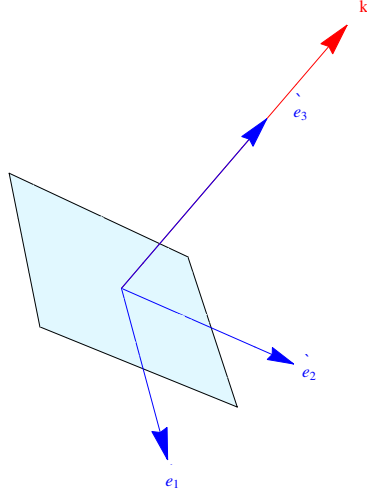
$$U = \sum_{\vec{k}} \frac{|\vec{p}_{\vec{k}}|^2 + \omega^2(\vec{k}) |\vec{q}_{\vec{k}}|^2}{2}$$

que como esperábamos de las ecuaciones de movimiento, corresponde a la energía de un sistema de osciladores armónicos de “masa” 1 y frecuencia $\omega(\vec{k})$.

En el manuscrito original, las siguientes dos subsecciones seguían a la construcción del Hamiltoniano y el operador momento lineal. Como parecen tener más que ver con la determinación de los grados de libertad del campo EM (clásico o cuántico), lo moví aquí.

Polarización.

Hasta este punto, dijimos que una configuración del campo electromagnético queda determinada por los vectores cuadratura $(\vec{q}_{\vec{k}}, \vec{p}_{\vec{k}})$ en cada modo. Un vector en el espacio tridimensional queda determinado por sus componentes en una dada base. Para cada modo \vec{k} , podemos elegir como vectores base $\{\hat{e}_1(\vec{k}), \hat{e}_2(\vec{k}), \hat{e}_3(\vec{k})\}$ con $\hat{e}_3(\vec{k}) = \vec{k}/|\vec{k}|$ y $\hat{e}_1(\vec{k}) = \frac{\hat{e}_3(\vec{k}) \times \hat{u}_z}{\sqrt{1 - (\hat{u}_z \cdot \vec{k})^2}}$ y $\hat{e}_2(\vec{k}) = \hat{e}_3(\vec{k}) \times \hat{e}_1(\vec{k})$ (Si \vec{k} apunta en la dirección $\pm \hat{z}$ elegimos $\hat{e}_1 = \pm \hat{e}_x$). De esta manera $\vec{q}_{\vec{k}} = \sum_{\alpha=1,2,3} q_{\vec{k},\alpha} \hat{e}_{\alpha}(\vec{k})$ y $\vec{p}_{\vec{k}} = \sum_{\alpha=1,2,3} p_{\vec{k},\alpha} \hat{e}_{\alpha}(\vec{k})$. Sin embargo, debido a la condición de gauge $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ $q_{\vec{k},3} = p_{\vec{k},3} = 0$. De esta manera, $\vec{A}(\vec{x}, t)$ queda caracterizado por 4 coeficientes reales por cada modo del



campo. Por motivos que veremos después, en vez de la base $\{e_1(\vec{k}), e_2(\vec{k}), e_3(\vec{k})\}$ suele preferirse la base compleja $\{\hat{e}_+(\vec{k}), \hat{e}_-(\vec{k}), \hat{e}_3(\vec{k})\}$ con $\hat{e}_\pm(\vec{k}) = \frac{\hat{e}_1(\vec{k}) \pm i\hat{e}_2(\vec{k})}{\sqrt{2}}$. Estos nuevos vectores también forman una base ortonormal respecto al producto escalar complejo, y satisfacen

$$\hat{e}_+^*(\vec{k}) \times \hat{e}_+(\vec{k}) = -\hat{e}_-^*(\vec{k}) \times \hat{e}_-(\vec{k}) = \mathbf{i}\hat{k} = \mathbf{i}e_3(\vec{k})$$

$$\hat{e}_+^*(\vec{k}) \times \hat{e}_-(\vec{k}) = \hat{e}_-^*(\vec{k}) \times \hat{e}_+(\vec{k}) = 0$$

$$\mathbf{i}\hat{k} \times \hat{e}_\pm(\vec{k}) = (e_\pm) = e_3(\vec{k})$$

Los campos $A_{\vec{k},\pm} \propto \hat{e}_\pm e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$ suelen llamarse base de ondas planas polarizadas circularmente a la derecha (izquierda) debido a que si tomamos su parte real, vemos que la dirección del vector polarización “gira” hacia la derecha (izquierda) respecto a un eje en la dirección de \vec{k} , conforme avanza el tiempo.

De esta manera, $\{q_{\vec{k},\eta}\}$ y $\{p_{\vec{k},\eta}\}$ (con $\eta = \pm$) son un conjunto de variables que determinan completamente el estado del campo electromagnético en la teoría clásica. Las ecuaciones dinámicas para ellas son análogas a las 5

$$\frac{dq_{\vec{k},\eta}}{dt} = p_{\vec{k},\eta} \quad (10)$$

$$\frac{dp_{\vec{k},\eta}}{dt} = -\omega(\vec{k})^2 q_{\vec{k},\eta} \quad (11)$$

de donde vemos que En términos de estas variables la energía se escribe

$$U = \sum_{\vec{k}, \eta=1,2} \frac{p_{\vec{k}, \eta}^2 + \omega^2(\vec{k}) q_{\vec{k}, \eta}^2}{2} \quad (12)$$

1.3 Acoplamiento con distribuciones de carga. Gauge de Coulomb

Consideremos ahora las soluciones en presencia de cargas y corrientes. La base de soluciones que encontramos para el caso libre nos provee de una base completa para los campos transversales ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$). Esto es suficiente para describir cualquier configuración del campo magnético, (incluso en presencia de corrientes). Por otro lado, debido a la ley de Gauss, los campos eléctricos en presencia de carga sí presentan divergencia. Por el teorema de la descomposición de Helmholtz, podemos escribir la solución general para el campo eléctrico en presencia de cargas como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\perp}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{\parallel}(\vec{r}, t)$$

tal que $\nabla \cdot \vec{E}_{\perp}(\vec{r}, t) = 0$ y $\nabla \times \vec{E}_{\parallel}(\vec{r}, t) = 0$. El primero de estos campos puede expresarse en términos de la base que ya construimos, mientras que el segundo será de la forma $\vec{E}_{\parallel}(\vec{r}, t) = -\nabla\phi$ para algún campo escalar. Uno podría suponer que este nuevo campo agrega nuevos grados de libertad al problema. Sin embargo, debido a la ley de Gauss,

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\phi = \rho/\epsilon_0$$

Como los campos se anulan en $\vec{r} \rightarrow \infty$, las soluciones para ϕ están completamente determinadas por la distribución *instantanea* de ρ , a menos de una función sólo del tiempo.

De esta manera, los campos quedan en el caso general descriptos por

$$-\nabla^2\phi = \rho/\epsilon_0 \text{ Ley de Gauss} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \text{ Condición de Gauge} \quad (14)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \text{ Ley de Gauss para el campo magnético} \quad (15)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \text{ Ley de Faraday} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0 j_{\perp} \text{ Ley de Ampere-Maxwell} \quad (17)$$

$$j_{\perp} = j - \epsilon_0 \frac{\partial\nabla\phi}{\partial t} \quad (18)$$

Donde $\nabla \cdot j_{\perp} = \nabla \cdot j - \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial\nabla\phi}{\partial t} = \nabla \cdot j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ debido a la ecuación de continuidad.

1.4 Invarianza de Gauge

$$\left. \begin{aligned} e^\mu &= (0, \hat{e}) \\ \hat{e} \cdot \vec{k} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Gauge 3-transversal}$$

Ante una transformación de gauge, $e^\mu \rightarrow e^\mu + \tilde{\chi} k^\mu$ ($\tilde{\chi} \equiv \tilde{\chi}(\vec{k}^\mu)$) el nuevo e^μ no está normalizado

$$A_{\vec{k}}^\mu = \sqrt{4\pi} \frac{e^\mu}{2\omega} e^{-i\mathbf{k}_\alpha x^\alpha} \quad (19)$$

con $e^\mu e_\mu = -1$ y $k_\alpha x^\alpha = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$. Como $k^\mu k_\mu = \omega^2 - \vec{k} \cdot \vec{k} = 0$, se sigue que $n_0 = 0$. 1. ¿Quién es n_0 ? 2. En principio, las ec. de Maxwell fijan la relación de dispersión para las componentes transversales de \vec{A} , pero no para su componente longitudinal. Por esto, no me queda claro que la expresión 19 sea correcta

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

con $\chi(x^\mu) = \int \tilde{\chi}(k^\mu) e^{i(k^\mu)x_\mu} d^4 k^m u$

La siguiente subsección no está en las notas, pero sería importante mostrar cómo se acoplan las cargas y corrientes al campo, y por qué podemos seguir usando las mismas variables. Si bien esto se sigue un poco de lo que se ve en electromagnetismo I, no es completamente inmediato.

2 Cuantización del campo y operadores de creación y aniquilación

2.1 El Hamiltoniano del campo electromagnético libre.

Para obtener una teoría cuántica que describa al campo electromagnético, necesitamos encontrar los operadores correspondientes a las variables clásicas que describen su estado (por ejemplo, $q_{\vec{k},\eta}$ y $p_{\vec{k},\eta}$), y un Hamiltoniano \mathbf{H} , de manera que para cualquier estado del campo $|\psi\rangle$,

1. la energía media coincida con el valor medio de \mathbf{H} , y
2. que los valores medios del campo \vec{A} asociado a cualquier estado $|\psi\rangle$, bajo la evolución que genera \mathbf{H} , satisfagan las ecuaciones clásicas de movimiento.

Una forma de construir una teoría que cumpla estas dos condiciones consiste en promover a las coordenadas $q_{\vec{k},\eta}$ y $p_{\vec{k},\eta}$ a operadores $q_{\vec{k},\eta} \rightarrow \mathbf{q}_{\vec{k},\eta}$ y $p_{\vec{k},\eta} \rightarrow \mathbf{p}_{\vec{k},\eta}$ en la expresión de la energía, y definir el Hamiltoniano

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{\vec{k}, p=1,2} \frac{\mathbf{p}_{\vec{k},\eta}^2 + \omega^2(\vec{k}) \mathbf{q}_{\vec{k},\eta}^2}{2}.$$

En el original, simplemente indicás que $[\mathbf{p}_{\vec{k},\eta}, \mathbf{q}_{\vec{k}',\eta'}] = i\hbar \delta_{\eta\eta'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$. Sin embargo, como cuantización canónica es algo que nunca vieron, no estaría mal agregar

algo como lo que sigue: La segunda condición se satisface si las ecuaciones de Ehrenfest

$$i\hbar \frac{d\mathbf{O}}{dt} = [\mathbf{H}, \mathbf{O}]$$

para cada observable, tiene la misma forma que las correspondientes ecuaciones de movimiento clásicas al remplazar las variables por sus correspondientes operadores. Esto se cumple si

$$[\hat{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{q}}_{\vec{k},p}] = \sum_{\vec{k}',p'} \frac{\{\vec{\mathbf{p}}_{\vec{k}',\eta'}, [\vec{\mathbf{p}}_{\vec{k}',\eta'}, \vec{\mathbf{q}}_{\vec{k},\eta}]\}}{2} + \frac{\omega^2(\vec{k})\{\vec{\mathbf{q}}_{\vec{k}',\eta'}, [\vec{\mathbf{q}}_{\vec{k}',\eta'}, \vec{\mathbf{q}}_{\vec{k},\eta}]\}}{2} = i\hbar \vec{\mathbf{q}}_{\vec{k},\eta}$$

$$[\hat{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{p}}_{\vec{k},p}] = \sum_{\vec{k}',p'} \frac{\{\vec{\mathbf{p}}_{\vec{k}',\eta'}, [\vec{\mathbf{p}}_{\vec{k}',\eta'}, \vec{\mathbf{p}}_{\vec{k},\eta}]\}}{2} + \frac{\omega^2(\vec{k})\{\vec{\mathbf{p}}_{\vec{k}',\eta'}, [\vec{\mathbf{q}}_{\vec{k}',\eta'}, \vec{\mathbf{p}}_{\vec{k},\eta}]\}}{2} = \omega^2(\vec{k})i\hbar \vec{\mathbf{q}}_{\vec{k},\eta}$$

donde $\{\mathbf{A}, \vec{\mathbf{B}}\} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ representa el anti-conmutador de los operadores $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$. Si $[\vec{\mathbf{q}}_{\vec{k},\eta}, \vec{\mathbf{q}}_{\vec{k}',\eta'}] = [\mathbf{p}_{\vec{k},\eta}, \mathbf{p}_{\vec{k}',\eta'}] = \mathbf{0}$ y $[\mathbf{p}_{\vec{k},\eta}, \vec{\mathbf{q}}_{\vec{k}',\eta'}] = i\hbar \delta_{pp'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$ vemos que la condición se cumple, aunque no es necesariamente la única elección posible para estos operadores³. Con esta elección del álgebra, encontramos que nuevamente, el campo electromagnético se comporta a nivel cuántico como un conjunto de osciladores armónicos - ahora, en su versión cuántica - y por lo tanto podemos encontrar una base de autoestados para su Hamiltoniano. Para esto, construimos los operadores de “subida” y “bajada”:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{c}}_{\vec{k},\eta} &= \frac{\omega(\vec{k})\mathbf{q}_{\vec{k},\eta} + i\mathbf{p}_{\vec{k},p}}{\sqrt{2\hbar\omega(\vec{k})}} \\ \hat{\mathbf{c}}_{\vec{k},\eta}^\dagger &= \frac{\omega(\vec{k})\mathbf{q}_{\vec{k},p} - i\mathbf{p}_{\vec{k},p}}{\sqrt{2\hbar\omega(\vec{k})}} \end{cases}$$

que satisfacen $[\hat{\mathbf{c}}_{\vec{k},\eta}, \hat{\mathbf{c}}_{\vec{k}',\eta'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{pp'}$ y $[\hat{\mathbf{c}}_{\vec{k},\eta}, \hat{\mathbf{c}}_{\vec{k}',\eta'}] = [\hat{\mathbf{c}}_{\vec{k},\eta}^\dagger, \hat{\mathbf{c}}_{\vec{k}',\eta'}^\dagger] = 0$. Invertiendo esta relación encontramos

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{\vec{k},\eta} &= \frac{\hbar}{\sqrt{2\hbar\omega(\vec{k})}} (\hat{\mathbf{c}}_{\vec{k},\eta} + \hat{\mathbf{c}}_{\vec{k},\eta}^\dagger) \\ \mathbf{p}_{\vec{k},\eta} &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega(\vec{k})}{2}} (\hat{\mathbf{c}}_{\vec{k},\eta} - \hat{\mathbf{c}}_{\vec{k},\eta}^\dagger) \end{cases}$$

lo que nos permite describir el Hamiltoniano y el campo en término de estas variables:

$$\mathbf{H} = \sum_{\vec{k}\eta} \hbar\omega(\vec{k}) \left(\hat{\mathbf{n}}_{\vec{k}\eta} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}\eta} \mathbf{c}_{\vec{k}\eta} \vec{A}_{\vec{k}\eta}(\vec{r}) + h.c.$$

³Nótese sin embargo que este álgebra de operadores no es necesariamente la única que satisface esta condición.

con $\vec{A}_{\vec{k}\eta}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{\epsilon_0 V \omega(\vec{k})}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \hat{e}_\eta(\vec{k}) = \vec{A}_{-\vec{k}, -\eta}^*(\vec{r})$ los “modos” del campo y $\mathbf{n}_{\vec{k}\eta} = \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}$ los operadores “número de ocupación” asociados a los modos (\vec{k}, η) . Notemos que estos modos son ortogonales:

$$\int \vec{A}_{\vec{k}\eta}^*(\vec{r}) \cdot \vec{A}_{\vec{k}'\eta'}(\vec{r}) d\Omega = \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}(\vec{k}') \frac{4\pi\hbar}{\sqrt{\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}')}} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} \frac{d\Omega}{V} \quad (20)$$

$$= \frac{4\pi\hbar \delta_{\eta,\eta'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}}{\epsilon_0 \omega(\vec{k})} \quad (21)$$

De la misma manera, construimos los operadores asociados a los campos eléctrico y magnético:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}\eta} \hat{\mathbf{c}}_{\vec{k}\eta} \vec{E}_{\vec{k},\eta}(\vec{r}) + h.c.$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}\eta} \hat{\mathbf{c}}_{\vec{k}\eta} \vec{B}_{\vec{k},\eta}(\vec{r}) + h.c.$$

con

$$\begin{cases} \vec{E}_{\vec{k},\eta}(\vec{r}) &= \mathbf{i}\omega(\vec{k}) \vec{A}_{\vec{k}\eta}(\vec{r}) = -\vec{E}_{-\vec{k}, -\eta}^*(\vec{r}) \\ \vec{B}_{\vec{k},\eta}(\vec{r}) &= \frac{1}{\omega(\vec{k})c} \vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}\eta}(\vec{r}) = \vec{B}_{-\vec{k}, -\eta}^*(\vec{r}) \end{cases}$$

Notamos además que en términos de los operadores de campo, los operadores escalera se escriben

$$\mathbf{c}_{\vec{k}\eta} = \frac{\epsilon_0}{4\pi\mathbf{i}\hbar} \left(\int \vec{E}_{\vec{k}\eta}^*(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) d^3r + \int \vec{A}_{\vec{k}\eta}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) d^3r \right)$$

$$\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger = \frac{\mathbf{i}\epsilon_0}{4\pi\hbar} \left(\int \vec{E}_{\vec{k}\eta}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) d^3r + \int \vec{A}_{\vec{k}\eta}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) d^3r \right)$$

2.2 Relaciones de conmutación de los operadores de campo

Los conmutadores de los campos que definimos antes vienen dados por

$$[\vec{\mathbf{A}}_i(x), \vec{\mathbf{A}}_j(y)] = [\vec{\mathbf{B}}_i(x), \vec{\mathbf{B}}_j(y)] = [\vec{\mathbf{E}}_i(x), \vec{\mathbf{E}}_j(y)] = [\vec{\mathbf{B}}_i(\vec{x}), \vec{\mathbf{A}}_j(\vec{y})] = 0 \quad (22)$$

$$[\vec{\mathbf{E}}_i(\vec{x}), \vec{\mathbf{A}}_j(\vec{y})] = \mathbf{i} \frac{8\pi\hbar}{\epsilon_0} \delta_{ij}^{(\perp)}(x-y) \quad (23)$$

$$[\vec{\mathbf{E}}_i(\vec{x}), \vec{\mathbf{B}}_j(\vec{y})] = \mathbf{i} \frac{8\pi\hbar}{\epsilon_0} \varepsilon_{jkl} \nabla_k \delta_{jl}^{(\perp)}(x-y) \quad (24)$$

con $\delta_{ij}^{(\perp)}(x-y) = \sum_{\vec{k}} (\delta_{ij} - \frac{\vec{k}_i \vec{k}_j}{|\vec{k}|^2}) \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}-\vec{y})}}{V}$ la “delta transversal”, que satisface $\int \sum_j \delta_{ij}^{(\perp)}(\vec{x}-\vec{y}) \vec{F}_j(\vec{y}) d^3y = \vec{F}_i(\vec{x})$ para cualquier campo regular $\vec{F}(\vec{x})$ cuyo soporte esté contenido en el volumen V y $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) = 0$, mientras que $\int \sum_j \delta_{ij}^{(\perp)}(\vec{x}-\vec{y}) \nabla_j \phi(\vec{y}) d^3y = 0$ para cualquier campo escalar con soporte en V .

2.3 Autoestados de \mathbf{H}_{EM}

Como el Hamiltoniano del sistema resulta ser el de una colección de osciladores armónicos desacoplados, podemos construir una base de autoestados como producto directo de las bases de autoestados asociadas a cada modo. Por otro lado, los autoestados de cada modo son de la forma

$$|n\rangle = \frac{(\mathbf{c}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

con n un número entero no negativo. Cualquier estado del sistema es una combinación lineal de estados de la forma

$$|\{n_{\vec{k},\eta}\}\rangle = \bigotimes_{\vec{k}\eta} |n_{\vec{k}\eta}\rangle_{\vec{k}\eta} = \left(\bigotimes_{\vec{k}\eta} \frac{(\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger)^{n_{\vec{k}\eta}}}{\sqrt{n_{\vec{k}\eta}!}} \right) |0\rangle_{EM}$$

con $|0\rangle_{EM} \equiv |\{0\}\rangle = \bigotimes |0\rangle_{\vec{k}\eta}$, y cumple $\mathbf{H}_{EM}|\{n_{\vec{k},\eta}\}\rangle = E(\{n_{\vec{k},\eta}\})|\{n_{\vec{k},\eta}\}\rangle$ donde $E(\{n_{\vec{k},\eta}\}) = \sum_{\vec{k},\eta} \hbar\omega_{\vec{k}} n_{\vec{k}\eta} + E_0$. La constante E_0 es la energía del estado de vacío $|0\rangle$. De nuestra derivación de \mathbf{H}_{EM} a partir de su correspondiente energía clásica, vemos que $E_0 = \sum_{\vec{k}\eta} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}$ es una cantidad divergente. Sin embargo, la adición de una constante al Hamiltoniano no cambia la física que este describe, por lo que podemos asignarle cualquier valor finito.

Autoestados del oscilador armónico cuántico.

El Hamiltoniano de un oscilador armónico cuántico es el operador hermítico

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2$$

con \mathbf{X} y \mathbf{P} dos variables que satisfacen las relaciones de conmutación $[\mathbf{P}, \mathbf{X}] = -i\hbar$.

Como \mathbf{H} es un operador hermítico, existirá una base completa $B = \{|n\rangle\}$ de autoestados. Además, como es una forma cuadrática positiva en los operadores \mathbf{X} y \mathbf{P} , el espectro de \mathbf{H} debe ser semidefinido positivo, por lo que existirá un estado $|0\rangle$ con energía mínima E_0 .

Introduciendo los operadores de “escalera” $\mathbf{c} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar^2}}\mathbf{X} + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar^2}}\mathbf{P}$, $\mathbf{c}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar^2}}\mathbf{X} - i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar^2}}\mathbf{P}$ que satisfacen las relaciones de conmutación $[\mathbf{c}, \mathbf{c}^\dagger] = 1$, $[\mathbf{c}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}^\dagger, \mathbf{c}^\dagger] = 0$. En términos de estos operadores el Hamiltoniano toma la forma

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{c}^\dagger \mathbf{c} + \frac{1}{2} \right)$$

Consideremos ahora al operador $\mathbf{c}^\dagger \mathbf{c}$, cuyos autoestados son los autoestados de \mathbf{H} . Nuevamente es un operador positivo, por lo que existe un estado $|0\rangle$ de autovalor mínimo λ_{\min} , mayor o igual que cero. Si actuamos con \mathbf{c} sobre ese estado, encontramos que $\mathbf{c}^\dagger \mathbf{c} \mathbf{c}|0\rangle = \mathbf{c} \mathbf{c}^\dagger \mathbf{c}|0\rangle - \mathbf{c}|0\rangle = (\lambda - 1)\mathbf{c}|0\rangle$. Por lo tanto, $\mathbf{c}|0\rangle = 0$ ya que de otra manera, contrario a la hipótesis, $\mathbf{c}|0\rangle$ sería un autovector de $\mathbf{c}^\dagger \mathbf{c}$ con autovalor $\lambda - 1 < \lambda$. De esto se sigue que $\mathbf{c}^\dagger \mathbf{c}|0\rangle = 0$ por lo que $\lambda_{\min} = 0$. Por otro lado, vemos que si $|n\rangle$ es un autoestado de $\mathbf{c}^\dagger \mathbf{c}$ con autovalor λ_n , $\mathbf{c}^\dagger|\psi\rangle$ también lo es, con autovalor $\lambda_n + 1$.

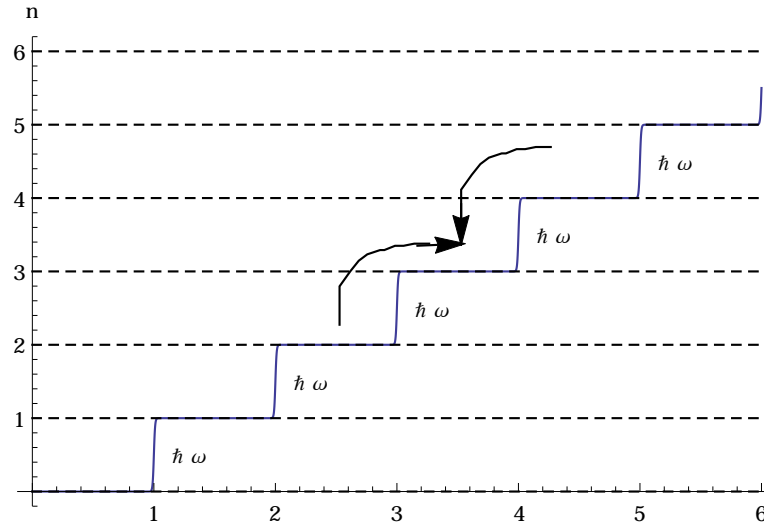
Así encontramos que el vector $|n\rangle = \frac{(\mathbf{c}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ es un autovector de $\mathbf{c}^\dagger\mathbf{c}$ con autovalor n .

Para ver que estos vectores están debidamente normalizados, notamos que si $|n-1\rangle$ lo está, entonces

$$\langle n|n\rangle = \langle n-1|\frac{\mathbf{c}\mathbf{c}^\dagger}{n}|n-1\rangle = \langle n-1|\frac{\mathbf{c}^\dagger\mathbf{c} + 1}{n}|n-1\rangle = \langle n-1|\frac{(n-1) + 1}{n}|n-1\rangle = 1$$

Decimos entonces que los estados $|n\rangle$ definen una base del espacio de Fock del oscilador, y que $\mathbf{n} = \mathbf{c}^\dagger\mathbf{c} = \sum_{n=0}^{\infty} n|n\rangle\langle n|$ es un operador “número de ocupación”.

De esta manera, podemos escribir $\mathbf{H} = \hbar\omega(\mathbf{n} + \frac{1}{2})$, y ver que la energía asociada al estado $|n\rangle$ es $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.



Por construcción, los elementos de matriz del operador \mathbf{c} vienen dados por

$$\langle m|\mathbf{c}|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{m,n-1}$$

reduciendo en 1 el número de ocupación del estado.

Observaciones:

- Para cualquiera de los autoestados de \mathbf{H} , los valores medios de $\vec{\mathbf{A}}(x)$, $\vec{\mathbf{E}}(x)$ y $\vec{\mathbf{B}}(x)$ son nulos.
- Debido a la invarianza translacional que impusimos en la construcción de la teoría, existe un modo con $\vec{k} = 0$. Vemos que si bien este modo resulta ser infinitamente degenerado, este modo no contribuye a los campos observables.

- En ciertos contextos, la “energía de punto cero” sí puede tener efectos físicos. En particular, esto ocurre si consideramos campos electromagnéticos confinados en volúmenes finitos variables en el tiempo.

2.4 Estados Coherentes

Como vimos en el apartado anterior, la base de autoestados de \mathbf{H}_{EM} admite una representación simple en términos de números de ocupación de los estados. Por otro lado, como los valores medios de los operadores de campo se anulan sobre estos estados, no son los más adecuados para recuperar el “límite clásico” de la teoría. Una base más conveniente para este fin es la llamada “base de estados coherentes”

$$|\vec{\mathcal{A}}\rangle = e^{-\frac{1}{2} \int \vec{\mathcal{A}}^*(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) d^3r} \exp \left(\sum_{\vec{k}\eta} \left(\int \vec{A}_{\vec{k}\eta}^*(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) d^3r \right) \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \right) |0\rangle$$

donde $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$ es una determinada configuración (compleja) de un campo vectorial tal que $\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} = 0$. Por medio de una transformada de Fourier, vemos que efectivamente especificar $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$ es equivalente a especificar un parámetro complejo para cada modo del campo, y que $|\vec{\mathcal{A}}\rangle$ es entonces un producto de estados coherentes en cada modo (ver recuadro). Los valores medios para los campos, respecto a estos estados vienen dados por

$$\langle \vec{\mathcal{A}} | \vec{\mathbf{A}}(\vec{x}) | \vec{\mathcal{A}} \rangle = \Re(\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}))$$

Usando las propiedades de los estados coherentes para cada modo vemos además que si $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación de onda (compleja) con $\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} = 0$ para todo t , y el estado del sistema a $t = t_0$ es $|\psi(t_0)\rangle = |\vec{\mathcal{A}}(t_0)\rangle$, entonces para cualquier instante posterior $|\psi(t)\rangle = |\vec{\mathcal{A}}(t)\rangle$.

Aplicaciones a la descripción de la luz laser?

La base de estados coherentes para el oscilador armónico

Para estudiar el límite clásico del problema del oscilador armónico, resulta útil construir la familia de estados coherentes

$$|z\rangle = e^{-\frac{z^*z}{2}} e^{z\mathbf{c}^\dagger} |0\rangle = \sum_n e^{-\frac{z^*z}{2}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

donde $z = x + \mathbf{i}p$ son números complejos. El conjunto de los estados coherentes satisface las siguientes propiedades:

- No ortogonalidad: $\langle z|z'\rangle = e^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}} \sum_n \frac{(z^*(z'))^n}{n!} = \exp(-\frac{|z-z'|^2+(z')^*z-z^*(z')}{2})$
- $\int |z\rangle\langle z| \frac{d^2z}{2\pi} = 1$
- Son autoestados del operador \mathbf{c} : $\mathbf{c}|z\rangle = z|z\rangle$, y por lo tanto, $\langle z|\mathbf{c}|z\rangle = z\langle z|z\rangle = z$ y $\langle z|\mathbf{n}|z\rangle = |z|^2$.
- El operador \mathbf{c}^\dagger actúa como $\mathbf{c}^\dagger|z\rangle = \frac{\partial}{\partial z}|z\rangle$ y su valor medio, sobre $|z\rangle$ viene dado por $\langle z|\mathbf{c}^\dagger|z\rangle = z^*$.
- Si $|z_0\rangle$ es el estado del sistema a $t = 0$, el estado a tiempo t es de la forma

$$|\psi(t)\rangle = |z(t)\rangle = |z_0 e^{i\omega t}\rangle$$

De esta manera, los estados coherentes evolucionan a estados coherentes, con parámetros que evolucionan según su evolución clásica.

2.5 Simetrías y cantidades conservadas.

2.5.1 Cantidad de Movimiento

Consideremos ahora el operador “Momento de la Cantidad de Movimiento” $\vec{\mathbf{P}}$ asociado al estado $|\{n_{k,p}\}\rangle$ (no confundir con la variable canónica conjugada a $\vec{q}_{k,\eta}$). La cantidad clásica correspondiente viene dada por

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{1}{8\pi\mu_0 c^2} \int_V \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} d^3r$$

Remplazando por los correspondientes operadores obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} &= \sum_{k,k',p,p'} (\mathbf{c}_{kp} \vec{E}_{k,p} + \mathbf{c}_{kp}^\dagger \vec{E}_{k,p}^*) \times (\mathbf{c}_{k'p'} \vec{B}_{k',p'} + \mathbf{c}_{k'p'}^\dagger \vec{B}_{k',p'}^*) \quad (25) \\ &= \sum_{k,k',p,p'} (\mathbf{c}_{kp} \mathbf{c}_{k'p'} \vec{E}_{k,p} \times \vec{B}_{k',p'} + \mathbf{c}_{kp}^\dagger \mathbf{c}_{k'p'}^\dagger \vec{E}_{k,p}^* \times \vec{B}_{k',p'}^* + \end{aligned} \quad (26)$$

$$+\mathbf{c}_{kp}\mathbf{c}_{k'p'}^\dagger\vec{E}_{k,p}\times\vec{B}_{k',p'}^*+\mathbf{c}_{k'p'}^\dagger\mathbf{c}_{kp}\vec{E}_{k,p}^*\times\vec{B}_{k',p'}\quad (27)$$

Integrando, y usando las relaciones de ortogonalidad, encontramos que

$$\int_V\vec{E}_{k,p}\times\vec{B}_{k',p'}d^3r=0$$

y

$$\int_V\vec{E}_{k,p}\times\vec{B}_{k',p'}^*d^3r=(i\omega)\frac{-\mathbf{i}}{c}\int\vec{A}_{kp}\times(\vec{k}\times\vec{A}_{kp})d^3r=\vec{k}\frac{2\pi}{\epsilon_0}\delta_{k,k'}\delta_{p,p'}$$

de manera que

$$\vec{\mathbf{P}}=\frac{1}{8\pi\mu_0c}\sum\hbar\vec{k}(\mathbf{n}_{k,p}+\frac{1}{2})\quad (28)$$

2.5.2 Momento angular

La densidad de momento angular (respecto al origen) para el campo electromagnético tiene la forma

$$\vec{\mathcal{J}}=\vec{r}\times\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{8\pi/\epsilon_0}$$

Expresando al campo $\vec{\mathbf{B}}$ en términos de $\vec{\mathbf{A}}$ encontramos

$$\vec{\mathcal{J}}=\vec{r}\times\frac{\vec{E}\times(\nabla\times\vec{\mathbf{A}})}{8\pi/\epsilon_0}\quad (29)$$

$$=\vec{r}\times\frac{(\sum_j\vec{E}_j\nabla\vec{\mathbf{A}}_j)-\vec{E}\cdot\nabla\vec{\mathbf{A}}}{8\pi/\epsilon_0}\quad (30)$$

$$=\frac{\sum_j\vec{E}_j(\vec{r}\times\nabla)\vec{\mathbf{A}}_j}{8\pi/\epsilon_0}-\frac{\vec{r}\times(\vec{E}\cdot\nabla\vec{\mathbf{A}})}{8\pi/\epsilon_0}\quad (31)$$

$$=\frac{\sum_j\vec{E}_j(\vec{r}\times\nabla)\vec{\mathbf{A}}_j}{8\pi/\epsilon_0}-\frac{\nabla\cdot(\vec{E}(\vec{r}\times\vec{\mathbf{A}}))-(\nabla\cdot\vec{E})\vec{r}\times\vec{\mathbf{A}}-\vec{E}\times\vec{\mathbf{A}}}{8\pi/\epsilon_0}\quad (32)$$

$$=\frac{\sum_j\mathbf{i}\vec{E}_j(-\mathbf{i}\vec{r}\times\nabla)\vec{\mathbf{A}}_j+\vec{E}\times\vec{\mathbf{A}}+\frac{\rho}{\epsilon_0}\vec{r}\times\vec{\mathbf{A}}}{8\pi/\epsilon_0}-\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{i}\vec{E}(\vec{r}\times\vec{\mathbf{A}})}{8\pi/\epsilon_0}\right)\quad (33)$$

donde en la última línea usamos que $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$. El momento angular total del campo se obtiene como una integral sobre todo el espacio de esta expresión, por lo que el último término no contribuye. En ausencia de cargas obtenemos $\vec{\mathbf{J}}_i=\int\vec{\mathcal{J}}_i d\Omega=\int\mathbf{i}\vec{E}(\vec{r}')\cdot\vec{\mathcal{J}}_i\cdot\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}')d^3r'$ con $\vec{\mathcal{J}}_i=\delta_{mn}(-\mathbf{i}\hbar\vec{r}\times\nabla)_i-\mathbf{i}\hbar\varepsilon_{imn}$ el generador de rotaciones infinitesimales para campos vectoriales. En efecto, vemos que

$$[\vec{\mathbf{J}}_i,\vec{\mathbf{A}}_j]=\int\mathbf{i}[\vec{E}(\vec{r}')\cdot\vec{\mathcal{J}}_i\cdot\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}'),\vec{\mathbf{A}}_j(\vec{r}')]d^3r'=\int\mathbf{i}[\vec{E}(\vec{r}'),\vec{\mathbf{A}}_j(\vec{r}')] \cdot\vec{\mathcal{J}}_i\cdot\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}')d^3r'=\int\delta^\perp(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{J}}_i\cdot\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}')d^3r'=\vec{\mathcal{J}}_i\cdot\vec{\mathbf{A}}(\vec{r})$$

ya que $\mathbf{i}\nabla\cdot\vec{\mathbf{J}}_i\cdot\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) = \left(\nabla_m\varepsilon_{ijk}(r_j\nabla_k)\vec{\mathbf{A}}_m(\vec{r}) + \nabla_m\varepsilon_{imk}\vec{\mathbf{A}}_k(\vec{r})\right) = \left(\varepsilon_{ijk}(r_j\nabla_k)\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}(\vec{r})\right) = 0$. De manera análoga, $[\vec{\mathbf{J}}_i, \vec{\mathbf{E}}_j] = \vec{\mathbf{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}}(\vec{r})$. A partir de estas dos relaciones,

$$\begin{aligned} [\vec{\mathbf{J}}_i, \vec{\mathbf{J}}_j] &= \int \left([\vec{\mathbf{J}}_i, \vec{\mathbf{E}}] \cdot \vec{\mathbf{J}}_j \cdot \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}}_j \cdot [\vec{\mathbf{J}}_i, \vec{\mathbf{A}}] \right) d^3r \\ &= \int \left((\vec{\mathbf{J}}_i \cdot \vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{J}}_j \cdot \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}}_j \cdot (\vec{\mathbf{J}}_i \cdot \vec{\mathbf{A}}) \right) d^3r \\ &= \int \vec{\mathbf{E}} \cdot (-\vec{\mathbf{J}}_i \cdot \vec{\mathbf{J}}_j + \vec{\mathbf{J}}_j \cdot \vec{\mathbf{J}}_i) \cdot \vec{\mathbf{A}} d^3r \\ &= \mathbf{i}\varepsilon_{ijk} \int \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}}_k \cdot \vec{\mathbf{A}} d^3r = \mathbf{i}\hbar\varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{J}}_k \end{aligned} \quad (34)$$

donde usamos que $(-\vec{\mathbf{J}}_i \cdot \vec{\mathbf{J}}_j + \vec{\mathbf{J}}_j \cdot \vec{\mathbf{J}}_i) = \mathbf{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\vec{\mathbf{J}}_k$

Notemos ahora que $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$, con $\vec{\mathbf{L}} = -\mathbf{i}\hbar\vec{r} \times \nabla$ una contribución “orbital” y $\vec{\mathbf{S}}_i = -\mathbf{i}\hbar\varepsilon_{ijk}$ una “contribución de spin”, de manera que $[\vec{\mathbf{L}}_i, \vec{\mathbf{L}}_j] = \mathbf{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\vec{\mathbf{L}}_k$, $[\vec{\mathbf{S}}_i, \vec{\mathbf{S}}_j] = \mathbf{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\vec{\mathbf{S}}_k$ y $[\vec{\mathbf{L}}_i, \vec{\mathbf{S}}_j] = 0$, por lo que ambos operadores cierran álgebras de rotación independientes. Esto sugiere escribir también

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$$

con $\vec{\mathbf{L}} = \int \mathbf{i}\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbf{L}}_i \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) d^3r$ y $\vec{\mathbf{S}} = \int \mathbf{i}\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbf{S}}_i \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) d^3r$. Sin embargo, estos operadores no cierran álgebras de rotación independientes: para verlo, construyamos explícitamente al operador $\vec{\mathbf{S}}$ en términos de los operadores escalera. Usando las relaciones de ortogonalidad de los campos, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{S}} &= \frac{1}{8\pi/\epsilon_0} \sum_{\substack{\vec{k}\vec{k}' \\ \eta\eta'}} \int \left(\mathbf{i}\omega\vec{A}_{\vec{k}\eta}(\vec{r}) \times \vec{A}_{\vec{k}'\eta'}^*(\vec{r})\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger\mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'} + \mathbf{i}\omega\vec{A}_{\vec{k}\eta}(\vec{r}) \times \vec{A}_{\vec{k}'\eta'}(\vec{r})\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}\mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'} \right) d\Omega + h.c. \\ &= \hbar \sum_{\vec{k}\eta=\pm} \eta\hat{k}\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger\mathbf{c}_{\vec{k}\eta} \end{aligned}$$

de manera que el “spin” total del campo es la suma de las contribuciones de cada modo, en la dirección de \vec{k} y con sentido paralelo o antiparalelo dependiendo de la polarización. Vemos además que por ser una combinación lineal de los operadores número de ocupación, el operador conmuta con el Hamiltoniano. Además,

$$[\vec{\mathbf{S}}_i, \vec{\mathbf{S}}_j] = 0$$

Vemos además que usando el mismo argumento que en 34, $[\vec{\mathbf{J}}_i, \vec{\mathbf{S}}_j] = \mathbf{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\vec{\mathbf{S}}_k$, de lo que se sigue que $[\vec{\mathbf{L}}_i, \vec{\mathbf{S}}_j] = [\vec{\mathbf{J}}_i - \vec{\mathbf{S}}_i, \vec{\mathbf{S}}_j] = \mathbf{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\vec{\mathbf{S}}_k$ y $[\vec{\mathbf{L}}_i, \vec{\mathbf{L}}_j] = [\vec{\mathbf{J}}_i - \vec{\mathbf{S}}_i, \vec{\mathbf{J}}_j - \vec{\mathbf{S}}_j] = \mathbf{i}\hbar\varepsilon_{ijk}(\vec{\mathbf{L}}_k + \vec{\mathbf{S}}_k)$, de manera que las componentes orbital y de spin no constituyen álgebras independientes.

2.5.3 Paridad

Una operación de simetría importante es la transformación de “paridad” $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, que cambia el sentido de todos los vectores, mientras que deja invariante a

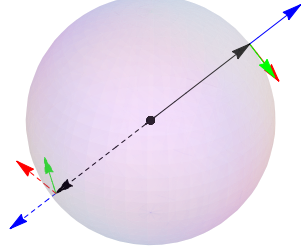
los pseudovectores. Si llamamos $\mathbf{\Pi}$ al operador que genera la transformación de paridad, vemos que $\mathbf{\Pi}$ debe ser un operador Hermítico ($\mathbf{\Pi}^\dagger = \mathbf{\Pi}$) e idempotente ($\mathbf{\Pi}\mathbf{\Pi} = \mathbf{1}$) ya que al aplicar dos veces sucesivas la transformación, se recupera el estado original. Si aplicamos al potencial vector la transformación de paridad, se debe cumplir que para cualquier estado $|\psi\rangle$, $\langle\psi|\vec{\mathbf{A}}(\vec{r})|\psi\rangle \rightarrow \langle\psi|\mathbf{\Pi}\vec{\mathbf{A}}(\vec{r})\mathbf{\Pi}|\psi\rangle = -\langle\psi|\mathbf{\Pi}\vec{\mathbf{A}}(-\vec{r})\mathbf{\Pi}|\psi\rangle$ lo que significa que sobre los operadores escalera actúa como $\mathbf{\Pi}\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}\mathbf{\Pi} = -\mathbf{c}_{-\vec{k},-\eta}$ y $\mathbf{\Pi}\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger\mathbf{\Pi} = -\mathbf{c}_{-\vec{k},-\eta}^\dagger$. Esto resulta en que $\mathbf{\Pi}$ conmuta con el Hamiltoniano electromagnético ya que

$$[\mathbf{H}_{EM}, \mathbf{\Pi}] = \mathbf{\Pi} (\mathbf{\Pi}\mathbf{H}_{EM}\mathbf{\Pi} - \mathbf{H}_{EM}) = 0$$

debido a que

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{H}_{EM}\mathbf{\Pi} = \sum_{\vec{k}\eta} \hbar\omega_{\vec{k}} (\mathbf{\Pi}\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}\eta} \mathbf{\Pi} + \frac{1}{2}) = \sum_{\vec{k}\eta} \hbar\omega_{\vec{k}} (\mathbf{c}_{-\vec{k},-\eta}^\dagger \mathbf{c}_{-\vec{k},-\eta} + \frac{1}{2}) = \mathbf{H}_{EM}$$

Vemos además que por un argumento semejante, $[\vec{\mathbf{J}}, \mathbf{\Pi}] = [\vec{\mathbf{L}}, \mathbf{\Pi}] = [\vec{\mathbf{S}}, \mathbf{\Pi}] = 0$, lo que es consistente con el caracter pseudovectorial de estos operadores.



2.5.4 Helicidad

Finalmente observamos que $\boldsymbol{\eta} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{L}}_{EM} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{S}$ debido a la transversalidad de $\vec{\mathbf{A}}$. Por construcción, $\boldsymbol{\eta}$ conmuta con el Hamiltoniano electromagnético libre. Además, usando las relaciones de ortonormalidad encontramos que

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{\vec{k}} \hbar (\mathbf{c}_{\mathbf{k},+}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k},+} - \mathbf{c}_{\vec{k},-}^\dagger \mathbf{c}_{\mathbf{k},-})$$

3 Excitaciones elementales. Fotones

En las secciones previas, vimos que los autoestados Hamiltoniano del campo electromagnético cuántico se identifican en términos de sus “números de ocupación”, y que las cantidades conservadas (energía, impulso, momento angular)

son funciones lineales de esos números de ocupación. Veremos ahora que esto nos permite interpretar la teoría como una teoría de partículas indistinguibles no interactuantes, a las que llamaremos *fotones*.

Para esto, comenzamos por introducir el operador “número de ocupación total” $\mathbf{N} = \sum_{\vec{k}, \eta} \mathbf{n}_{\vec{k}, \eta}$. Como este operador conmuta con el Hamiltoniano libre \mathbf{H}_{EM} , los subespacios propios del primero son subespacios propios del segundo. Si nos restringimos al subespacio de estados tales que $\mathbf{N}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$, generado por los estados de la forma $|\vec{k}\eta\rangle = \mathbf{c}_{\vec{k}, \eta}^\dagger |0\rangle$, podemos construir un “Hamiltoniano” para el sector “de una partícula”:

$$\mathbf{H}_1 = \sum_{\vec{k}\eta} \hbar\omega(\vec{k}) |\vec{k}\eta\rangle \langle \vec{k}\eta|$$

Para construir el análogo a la “función de onda” de una partícula, introducimos el conjunto de estados “en la representación de coordenadas” $|\vec{x}, i\rangle \equiv \vec{\mathbf{A}}_i(\vec{x})|0\rangle$ y definimos $|\vec{\mathcal{A}}\rangle = \int \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}) \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{x})|0\rangle d\Omega$ ⁴ con $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$ campos con divergencia nula que se anulan para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Encontramos entonces que

$$\langle \vec{x}, i | \vec{\mathcal{A}} \rangle = \sum_{\substack{\vec{k}\vec{k}' \\ \eta\eta'}} \int e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \vec{k} \cdot \vec{r})} (\hat{e}_{\eta'})_i (\hat{e}_\eta^*) \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) \langle 0 | \mathbf{c}_{\vec{k}', \eta'} \mathbf{c}_{\vec{k}, \eta}^\dagger | 0 \rangle d\Omega \quad (35)$$

$$= \sum_{\vec{k}\eta} \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{r})} (\hat{e}_\eta)_i (\hat{e}_\eta^*) \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) d\Omega \quad (36)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{r})} \left(\sum_{\eta} (\hat{e}_\eta)_i (\hat{e}_\eta^*) \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) \right) d\Omega \quad (37)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{r})} (\vec{\mathcal{A}}_i(\vec{x}) - (\hat{k} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r})) \hat{k}_i) d\Omega \quad (38)$$

$$= \int \delta(\vec{x} - \vec{r}) \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) d\Omega - \nabla_i \int ((\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) \cdot \sum_{\vec{k}} \frac{\nabla_{\vec{r}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{r})}}{|\vec{k}|^2}) d\Omega = \vec{\mathcal{A}}_i(\vec{x}) \quad (39)$$

ya que

$$\int ((\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) \cdot \nabla_{\vec{r}} \sum_{\vec{k}} \frac{\nabla_{\vec{r}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{r})}}{|\vec{k}|^2}) d\Omega = \int \nabla_{\vec{r}} \cdot (\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{r})}}{|\vec{k}|^2}) d\Omega - \int (\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r})) \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{r})}}{|\vec{k}|^2} d\Omega = 0$$

Observamos además que $|\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\rangle$ satisface la ecuación de Klein-Gordon con masa 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \vec{x}, i | \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle &= \langle \vec{x}, i | \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\rangle \\ &= \langle \vec{x}, i | \frac{-\mathbf{H}_{EM}^2}{\hbar^2} |\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\rangle \end{aligned}$$

⁴no confundir con los estados coherentes que definimos antes

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\substack{\vec{k}_\eta \\ \vec{k}'_{\eta'}}} \langle \vec{x}, i | \omega(\vec{k}) \omega(\vec{k}') \mathbf{a}_{\vec{k}_\eta}^\dagger \mathbf{a}_{\vec{k}_\eta} \mathbf{a}_{\vec{k}'_{\eta'}}^\dagger \mathbf{a}_{\vec{k}'_{\eta'}} | \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle \\
&= - \sum_{\vec{k}_\eta} \omega(\vec{k})^2 \langle \vec{x}, i | \mathbf{a}_{\vec{k}_\eta}^\dagger \mathbf{a}_{\vec{k}_\eta} | \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle \\
&= - \sum_{\vec{k}_\eta} c^2 |\vec{k}|^2 \langle \vec{x}, i | \mathbf{a}_{\vec{k}_\eta}^\dagger \mathbf{a}_{\vec{k}_\eta} | \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle \\
&= c^2 \nabla^2 \langle \vec{x}, i | \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle
\end{aligned}$$

Consideremos ahora los overlaps para el operador de spin \vec{S} actuando sobre el estado de un fotón:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, i | \vec{S}_{EM} | \vec{\mathcal{A}} \rangle &= \int \langle \vec{x}, i | \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) | \vec{\mathcal{A}} \rangle d^3 r \\
&= i\hbar \sum_{\vec{k}\vec{k}'\eta\eta'} \int e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}} \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') \times \hat{e}_\eta(\vec{k}) \langle \vec{x}, i | \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}_\eta} | \vec{\mathcal{A}} \rangle d^3 r \\
&= i\hbar \sum_{\vec{k}\vec{k}'\eta\eta'} \int e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}} \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') \times \hat{e}_\eta(\vec{k}) \left(\langle 0 | e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} (\hat{e}_{\eta'})_i \right) \left(\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} (\hat{e}_\eta^* \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}')) d^3 x' | 0 \rangle \right) d^3 r \\
&= i\hbar \sum_{\vec{k}\vec{k}'\eta\eta'} \int e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}} \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') \times \hat{e}_\eta(\vec{k}) \left((\hat{e}_{\eta'}(\vec{k}'))_i \right) \left(\int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} (\hat{e}_\eta(\vec{k}))^* \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}') d^3 x' \right) d^3 r \\
&= i\hbar \sum_{\vec{k}'} \int e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \left(\sum_{\eta'} (\hat{e}_{\eta'}(\vec{k}'))_i \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') \right) \times \left(\sum_{\vec{k}, \eta} \int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}+\vec{r}-\vec{x}')} d^3 x' (\hat{e}_\eta(\vec{k}))^* \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}') \hat{e}_\eta(\vec{k}) \right) d^3 r \\
&= i\hbar \hat{e}_i \times \vec{\mathcal{A}}(\vec{x})
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\langle \vec{x}, i | (\vec{S}_{EM})_l | \vec{\mathcal{A}} \rangle = i\hbar \varepsilon_{ijl} \langle \vec{x}, j | \vec{\mathcal{A}} \rangle$$

Por lo que podemos pensar a las matrices $S_l = i\hbar \varepsilon_{ijl}$ como las “matrices de spin” para estos estados. Observamos que $[S_l, S_{l'}] = i\hbar \varepsilon_{ll'j} S_j$ y que $S^2 = \sum_j S_j^2 = 2$, por lo que actúan sobre los estados como operadores de spin 1. Sin embargo, vemos que debido a la condición de gauge, los valores propios posibles para el operador de spin no son tres sino dos: como vimos anteriormente, la condición de gauge impone que en cada subespacio propio asociado a un impulso \vec{k} , el spin debe ser paralelo (o antiparalelo) a la dirección de \vec{k} . De esta manera, en cada subespacio encontramos dos estados posibles para el espín, que corresponden a los dos posibles sentidos de polarización circular.

Por lo anterior, los *fotones* resultan ser partículas de masa en reposo $m_0 = 0$, spin 1 y “transversalidad” ($\vec{S} \cdot \vec{k} = 0$).

3.1 Estados de momento angular total definido

En la sección anterior, vimos que las excitaciones elementales del campo electromagnético son partículas de spin 1, que satisfacen la ecuación de Klein Gordon con masa en reposo $m_0 = 0$, con la propiedad de “transversalidad”, por lo que a cada modo “espacial” le corresponden dos estados “de spin”, uno por cada modo de polarización circular. Los operadores de campo $\vec{\mathbf{A}}(\vec{x})$, $\vec{\mathbf{E}}(\vec{x})$ y $\vec{\mathbf{B}}(\vec{x})$ queda expresados entonces como una combinación lineal de productos de operadores escalar multiplicados por la “función de onda” asociada a los estados de una base ortogonal de estados estacionarios de una partícula. Inicialmente, elegimos como base de estados la base de estados invariantes ante translaciones (esto es, estados que conmutan con el operador impulso \mathbf{P}). Sin embargo, esa no es la única elección posible. Como \mathbf{H}_{EM} conmuta con el momento angular total $\vec{\mathbf{J}}$, podríamos haber empleado una base de autovectores de \mathbf{J}^2 y \mathbf{J}_z para expandir los operadores. En esta sección discutiremos cómo construir esa base en términos de los “esféricos armónicos vectoriales”.

3.1.1 Armónicos Esféricos escalares y esféricos armónicos vectoriales

Los armónicos esféricos escalares son una base de soluciones para la ecuación de autovalores asociada al operador \mathbf{L}^2 :

$$\mathbf{L}^2 Y_l^{(m)}(\hat{n}) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^{(m)}(\hat{n}) \quad (40)$$

que en coordenadas esféricas toma la forma

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) \frac{\partial Y_l^{(m)}(\theta, \phi)}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin(\theta)^2} \frac{\partial^2 Y_l^{(m)}(\theta, \phi)}{\partial^2 \phi} + l(l+1) Y_l^{(m)}(\theta, \phi) = 0$$

($\hat{n} = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$)

Las soluciones de esta ecuación vienen dadas por

$$Y_l^{(m)}(\theta, \phi) = \mathbf{i}^{l+m+|m|} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{(m)}(\cos(\theta)) e^{\mathbf{i}m\phi} \quad (41)$$

donde $P_l^{(m)}(u)$ son los polinomios asociados de Legendre.

Los polinomios asociados de Legendre Los polinomios asociados de Legendre son las soluciones regulares en $u = 0$ y $u = 1$ de la ecuación

$$(1-u^2) \frac{\partial}{\partial u} \left((1-u^2) \frac{\partial}{\partial u} P_l^{(m)}(u) \right) + (l(l+1)(1-u^2) - m^2) P_l^{(m)}(u) = 0$$

con l y m números enteros no negativos tal que $m \leq l$. A los polinomios $P_l(u) = P_l^{(0)}(u)$ se los conoce como "Polinomios de Legendre" de grado l "a secas". Estos se conectan con los polinomios asociados de Legendre vía la relación

$$P_l^{(m)}(u) = (-1)^m (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_l(u)$$

O vía la fórmula de Rodriguez,

$$P_l^{(m)}(u) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-u^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}} (u^2-1)^l$$

lo que permite extender la definición al caso $-l \leq m < 0$. Notemos que los polinomios de Legendre resultan normalizados de manera que $P_l^{(0)}(1) = 1$.

Ortogonalidad:

$$\int P_l^{(m)}(x) P_l^{(m)}(x) dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{l,l'}$$

Completitud:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+\frac{1}{2})(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l(u) P_l(v) = \delta(u-v)$$

Paridad:

$$P_l^{(m)}(-u) = (-1)^{m+l} P_l^{(m)}(u)$$

Polinomios de orden más bajo

l	m=0	m=1	m= 2
0	1		
1	u	$-\sqrt{1-u^2}$	
2	$\frac{1}{2}(3u^2-1)$	$-3x\sqrt{1-u^2}$	$3(1-u^2)$

Propiedades de los Armónicos Esféricos *Ortonormalidad:*

$$\int Y_{l'}^{(m)'}(\hat{n}) Y_l^{(m)}(\hat{n})^* d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{m=-l}^l |Y_l^{(m)}(\hat{n})|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$$

Compleitud:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (Y_l^{(m)})^*(\hat{n}') Y_l^{(m)}(\hat{n}) = \delta(\vec{n} - \vec{n}')$$

Paridad: Ante una transformación de paridad $\vec{r} \leftrightarrow -\vec{r}$ (en coordenadas esféricas, $\theta \leftrightarrow \pi - \theta$, $\phi \leftrightarrow \pi + \phi$)

$$Y_l^m(-\vec{n}) = (-1)^l Y_l^m(\vec{n})$$

Teorema de adición de los Armónicos Esféricos De las propiedades de ortonormalidad y completitud de los esféricos armónicos se sigue que

$$P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l (Y_l^{(m)})^*(\hat{n}') Y_l^{(m)}(\hat{n})$$

Coefficientes de Clebsh-Gordan Si $\vec{\mathbf{L}}^{(1)}$ y $\vec{\mathbf{L}}^{(2)}$ son dos representaciones independientes del álgebra de rotaciones ($[\vec{\mathbf{L}}_i^{(a)}, \vec{\mathbf{L}}_j^{(b)}] = \delta_{ab}i\hbar\varepsilon_{ijk}\vec{\mathbf{L}}_k^{(a)}$), tales que $(\vec{\mathbf{L}}^{(1)})^2 = l_1(l_1 + 1)$ y $(\vec{\mathbf{L}}^{(2)})^2 = l_2(l_2 + 1)$ los operadores $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}}^{(1)} + \vec{\mathbf{L}}^{(2)}$ constituyen otra representación del mismo álgebra. Nos interesa ahora expresar los autovectores comunes a $\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_z^2$, en términos de la base producto de autovectores de $\vec{\mathbf{L}}_z^{(1)}$ y $\vec{\mathbf{L}}_z^{(2)}$.

$$|JM\rangle = C_{JM}^{l_1 m_1 l_2 m_2} |m_1\rangle |m_2\rangle$$

Los coeficientes $C_{JM}^{m_1 m_2}$ se conocen como los Coeficientes de *Clebsh-Gordan*. Observamos que sólo pueden ser no nulos si $|l^{(1)} - l^{(2)}| \leq J \leq l^{(1)} + l^{(2)}$, $M = m_1 + m_2$.

Para determinar sus valores, basta con diagonalizar el operador $\mathbf{J}^2 - (\mathbf{L}^{(1)})^2 - (\mathbf{L}^{(2)})^2 = 2\vec{\mathbf{L}}^{(1)} \cdot \vec{\mathbf{L}}^{(2)} = \mathbf{L}_+^{(1)}\mathbf{L}_-^{(2)} + \mathbf{L}_+^{(2)}\mathbf{L}_-^{(1)} + 2\mathbf{L}_z^{(1)}\mathbf{L}_z^{(2)}$ en cada sector con $M = m_1 + m_2$ definido.

Alternativamente, podemos partir de que $|l^{(1)} + l^{(2)}, l^{(1)} + l^{(2)}\rangle = |l^{(1)}\rangle |l^{(2)}\rangle$ y construir todos los autovectores usando las relaciones de ortonormalidad y el hecho de que $|J, M\rangle \propto \mathbf{J}_-^{J-M} |J, J\rangle$ donde $\mathbf{J}_- = \vec{\mathbf{J}}_x - i\vec{\mathbf{J}}_y$.

J	$m_s = 1/2$	$m_s = -1/2$
$l + 1/2$	$\frac{\sqrt{2(1+2l)(1+2l-M)}}{2+4l}$	$\sqrt{\frac{1+2l-2M}{2+4l}}$
$l - 1/2$	$\frac{-\sqrt{2(1+2l)(1+2l+M)}}{2+4l}$	$\sqrt{\frac{1+2l+2M}{2+4l}}$

Si $l^{(2)} = s = 1$

J	$m_s = 1$	$m_s = 0$	$m_s = -1$
$l + 1$	$\sqrt{1 + \frac{M}{l(l+1)-M^2}}/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{1 - \frac{M}{l(l+1)-M^2}}/2$
l	$\sqrt{1 - \frac{M}{l(l+1)-M^2}}/\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{1 + \frac{M}{l(l+1)-M^2}}/\sqrt{2}$
$l - 1$	$\sqrt{1 + \frac{M}{l(l+1)-M^2}}/2$	$-1/\sqrt{2}$	$\sqrt{1 - \frac{M}{l(l+1)-M^2}}/2$

En términos de los esféricos armónicos, una función escalar cualquiera toma la forma

$$\Psi(r\hat{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_l(r) Y_l^{(m)}(\hat{n})$$

y si $\Psi(r\hat{n}, t)$ es una solución de la ecuación de onda con simetría esférica, su expansión será de la forma

$$\Psi(r\hat{n}, t) = \sum_k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_l(kr) Y_l^{(m)}(\hat{n}) e^{ickt}$$

donde $R_l(r)$ serán soluciones de la ecuación de Bessel esférica, y la suma en k barre todos los valores para los que $R_l(kr)$ satisfice las condiciones de borde.

Ahora queremos generalizar estos resultados para el caso de ondas vectoriales, en términos de autofunciones de \mathbf{J}^2 y \mathbf{J}_z . Una forma de construir una base de tales funciones es haciendo uso de los coeficientes de Clebsh-Gordan

$$\vec{\Phi}_{JMI}(\vec{n}) = \sum_{m=-1}^1 C_{JM}^{lm} \hat{e}_\eta Y_l^{(M-m)}(\hat{n})$$

donde $\hat{e}_{\pm 1} = \hat{e}_x \pm \hat{e}_y$, $\hat{e}_0 = \hat{e}_z$ son los autovectores de $(\hat{\mathbf{G}}_z/\hbar)_{ij} = -i\epsilon_{ijz}$. Usando estas funciones, los autovectores del operador de Laplace de autovalor $-k^2$ (regulares en el origen) tiene la forma $\vec{\Psi}_{k,J,M,l}(\vec{r}) = j_l(kr)\vec{\Phi}_{JMI}(\vec{n})$. Sin embargo, vemos que ninguna de estas soluciones satisface la condición de transversalidad $\nabla \cdot \vec{\Psi}_{k,J,M,l}(\vec{r}) = 0$. Para encontrar las combinaciones lineales de estas soluciones que sí cumplan la condición de transversalidad, introducimos los “esféricos armónicos vectoriales”

$$\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^e(\hat{n}) = \frac{1}{j(j+1)} \nabla Y_J^M(\hat{n}) \quad (42)$$

$$\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^m(\hat{n}) = \hat{n} \times Y_{JM}^e(\hat{n}) = \frac{1}{j(j+1)} \nabla \times (\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^l(\hat{n})) \quad (43)$$

$$\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^l(\hat{n}) = \hat{n} Y_J^M(\hat{n}) \quad (44)$$

Estos campos verifican

- Para cada \hat{n} , (excepto en un subconjunto de medida cero), $\{\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^e(\hat{n}), \vec{\mathcal{Y}}_{JM}^m(\hat{n}), \vec{\mathcal{Y}}_{JM}^l(\hat{n})\}$ define una base ortogonal dextrógira. Además, $|\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^e(\hat{n})| = |\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^m(\hat{n})|$ y $|\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^l(\hat{n})| = |Y_J^M(\hat{n})|$.
- Para $J = 0$, sólo $\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^l(\hat{n}) \neq 0$.
- Como prometen sus índices, los tres campos son autovectores de los operadores \mathbf{J}^2 y \mathbf{J}_z con autovalores J y M respectivamente, lo que se puede verificar notando que las componentes de \hat{n} son combinaciones lineales de $Y_1^m(\hat{n})$, y que $[\mathbf{L}_i, \nabla_l] = -i\hbar\epsilon_{ijk}[r_j \nabla_k, \nabla_l] = i\hbar\epsilon_{ilk} \nabla_k = -(\vec{\mathbf{S}}_i \nabla)_l$.
- Cualquier par de estos campos satisface las relaciones de ortogonalidad

$$\int \vec{\mathcal{Y}}_{J'M'}^a(\hat{n})^* \vec{\mathcal{Y}}_{JM}^{a'}(\hat{n}) d\Omega = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{a,a'}$$

- $\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^{(m)}(\hat{n})$ es autovector de \mathbf{L}^2 , pero $\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^{(e)}(\hat{n})$ y $\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^{(l)}(\hat{n})$ no lo son.
- $\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^{(e)}(\hat{n})$ y $\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^{(l)}(\hat{n})$ tienen paridad $(-1)^J$ mientras que $\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^{(m)}(\hat{n})$ tiene paridad $(-1)^{J+1}$.
- $\vec{\Psi}_{kJM}^{(mag)}(\vec{r}) = j_J(kr)\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^m$ es una autofunción del operador de Laplace con autovalor $-k^2$ y $\nabla \cdot \vec{\Psi}_{kJM}^{(mag)}(\vec{r}) = 0$. Un segundo autovector viene dado por $\vec{\Psi}_{kJM}^{(el)}(\vec{r}) = \nabla \times$

Figure 2: Fields in the Spherical Representation

$vec\Psi_{kJM}^{(mag)}(\vec{r}) = -krj'_J(kr)\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^e + j_J(kr)(\nabla \times \vec{\mathcal{Y}}_{JM}^m)$ que también cumple con $\nabla \cdot \vec{\Psi}_{kJM}^{(el)}(\vec{r}) = 0$. De las relaciones de ortogonalidad surge que $\vec{\Psi}_{kJM}^{(mag)}(\vec{r}) \cdot \vec{\Psi}_{kJM}^{(el)}(\vec{r}) = 0$ por lo que $\vec{\Psi}_{kJM}^{(el)}(\vec{r})$ es una combinación lineal de $\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^e$ y $\vec{\mathcal{Y}}_{JM}^l$.

Usando esta nueva base de funciones, (en el límite de $V \rightarrow \infty$) es posible reescribir al operador de campo $\vec{\mathbf{A}}(\vec{r})$ como

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) = \sum_{k,t=\{el,mag\}} \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{M=-J}^J \sqrt{\frac{2k^2}{(V/(4\pi))^{1/3}}} \sqrt{\frac{4\pi\hbar}{\epsilon_0 ckV}} \vec{\Psi}_{kJM}^{(t)}(\vec{r}) \mathbf{b}_{kJMt} + h.c \quad (45)$$

con $\mathbf{b}_{kJMt} = \sqrt{\frac{2k^2}{(V/(4\pi))^{1/3}}} \sum_{\vec{k}\eta} (\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{e}_{\eta}^*(\vec{k}) \cdot \vec{\Psi}_{kJM}^{(t)}(\vec{r}) x d^3r) \mathbf{a}_{\vec{k}\eta}$ que satisfacen

$$[\mathbf{b}_{kJMt}, \mathbf{b}_{k'J'M't'}^{\dagger}] = \delta_{kk'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{tt'}$$

4 Vertices Elementales

En electrodinámica clásica

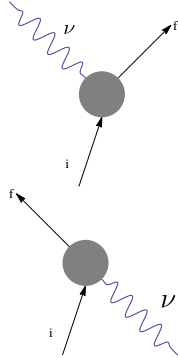
$$\vec{V}_{int} = -e j^{\mu} A_{\mu}$$

con la condición $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$ (conservación de la carga).

En el caso cuántico el operador de interacción que acopla al campo electromagnético con las cargas es de la forma

$$\mathbf{V}_{int} = e \int \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{A}} d\Omega$$

$$\langle f | \mathbf{V}(t) | i \rangle = e \int \langle f | \vec{\mathbf{j}} | i \rangle \vec{A}_n d\Omega$$



$$V_{fi}^{emision} = e \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\omega}} e_{\mu}^* j_{fi}^{\mu}(\vec{k})$$

$$j_{fi}^{\mu}(\vec{k}) = \int j_{fi}^{\mu}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\Omega$$

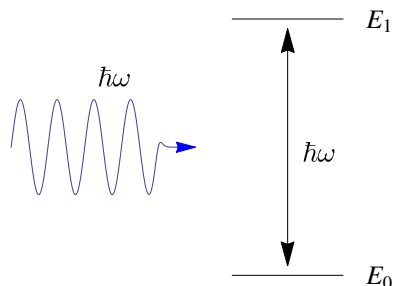
$$V_{fi}^{absorcion} = e \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\omega}} e_{\mu} j_{fi}^{\mu}(\vec{k})$$

Emisión y absorción

Para transiciones que involucran estados en el continuo, la probabilidad de transición por unidad de tiempo, de acuerdo a la regla de oro de Fermi

$$dR = 2\pi |V_{fi}| \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

Mientras que entre estados del discreto,



Resultados elementales:

como $\langle n-1 | \mathbf{c}_m | n \rangle = \sqrt{n}$ y $\langle n+1 | \mathbf{c}_m^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1}$

$$\frac{dR_{\text{emisión}}}{dR_{\text{absorción}}} \approx \frac{N+1}{N}$$

(A. Einstein, 1916)

Radiación Multipolar Eléctrica

$$\vec{A}_{\omega,j,m} = \frac{4\pi}{\omega^{3/2}} \delta(|k| - \omega) \vec{Y}_{jm}(\vec{n})$$

Fotón tipo eléctrico

4.1 Apéndice: El momento angular como función de los operadores de subida y bajada

Un problema que surge al considerar la parte orbital del momento angular es que, cuando definimos la cuantización del campo, lo hicimos asumiendo que los campos vivían dentro de una caja cúbica con condiciones periódicas. Esto simplificaba el tratamiento de la simetría de traslaciones, pero claramente el esquema rompe la simetría de rotaciones del problema, por lo que por ejemplo, es de esperarse que $\vec{\mathbf{L}}_{EM}$ no conmute exactamente con \mathbf{H}_{EM} , sino que sólo en el límite de $V \rightarrow \infty$ los valores medios de este conmutador se anulen sobre los estados “suficientemente regulares”. Notemos además que si bien para configuraciones “regulares” de los campos, para los que los valores medios de $\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t)$ se anulan para $|\vec{r}|$ suficientemente grande, esto no constituye un problema. Por

otro lado, si consideramos elementos de matriz entre autoestados de \mathbf{H}_{EM} , notamos que si $\langle i|\hat{\mathbf{A}}(\vec{r}, t)|i\rangle$ no es idénticamente nulo para todo \vec{r} , no se anula en ningún sitio, por lo que las manipulaciones que hicimos anteriormente en la derivación de $\vec{\mathbf{L}}_{EM}$ bien podrían no aplicar.

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{EM} &= \int \sum_i \mathbf{E}_i(\vec{r})(\vec{r} \times \nabla) \mathbf{A}_i(\vec{r}) d^3r \\ &= \vec{\mathbf{L}}_{+-} + \frac{\vec{\mathbf{L}}_{--} + \vec{\mathbf{L}}_{++} + \vec{\ell}}{2}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{L}}_{++} &= \vec{\mathbf{L}}_{--}^\dagger = \hbar \sum_{\substack{\vec{k}\eta \\ \vec{k}'\eta'}} \mathbf{i} \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}(\vec{k}') \left(\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} (\vec{r} \times \nabla) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \frac{d^3r}{V} \right) \cdot \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}^\dagger \\ \vec{\mathbf{L}}_{+-} &= \hbar \sum_{\substack{\vec{k}\eta \\ \vec{k}'\eta'}} \mathbf{i} \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}(\vec{k}') \left(\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} (\vec{r} \times \nabla) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \frac{d^3r}{V} \right) \cdot \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'} \\ \vec{\ell} &= \hbar \sum_{\vec{k}} \mathbf{i} \int \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} (\vec{r} \times \nabla) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \frac{d^3r}{V}\end{aligned}\quad (47)$$

donde usamos la definición de los operadores \mathbf{E}_i y \mathbf{A}_i en términos de los operadores de subida y bajada. Nótese que el término en $\vec{\ell}$ aparece debido a las relaciones de conmutación de los operadores $[\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}, \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}^\dagger] = \delta_{\eta\eta'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$. Para evaluar las integrales, notamos primero que

$$\begin{aligned}\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} (\vec{r} \times \nabla) e^{\pm i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \frac{d^3r}{V} &= \pm \mathbf{i} \left(\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{\pm i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \frac{d^3r}{V} \right) \times \vec{k}' \\ &= \pm \mathbf{i} (-\mathbf{i} \nabla_\kappa) \left(\int e^{i\kappa\cdot\vec{r}} \frac{d^3r}{V} \right) \Big|_{\kappa=(\pm\vec{k}'-\vec{k})} \times \vec{k}' \\ &= \pm \nabla_\kappa \delta_V^3(\kappa) \Big|_{\kappa=(\pm\vec{k}'-\vec{k})} \times \vec{k}'\end{aligned}$$

donde usamos que $\nabla e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \pm i\vec{k}' e^{\pm i\vec{k}'\cdot\vec{r}}$, $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = -\mathbf{i} \nabla_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, e introducimos la función

$$\delta_V^{(3)}(\vec{k}) = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{d^3r}{V} = \prod_{i=x,y,z} \frac{\text{sinc}(\kappa_i V^{1/3}/2)}{k_i V^{1/3}/2} = \prod_{i=x,y,z} \text{sinc}(\kappa_i V^{1/3}/2) \quad (49)$$

donde $\text{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u}$ es la función “seno cardinal”, que vale 1 si $u = 0$, y se anula para cualquier otro múltiplo de π (ver figura). Para los vectores que satisfacen la condición de periodicidad ($\vec{k} = \frac{2\pi}{V^{1/3}} \vec{m}$, con \vec{m} un vector de componentes enteras), $\delta_V^{(3)}(\vec{k}) = \begin{cases} 1 & \vec{k} = \vec{0} \\ 0 & \vec{k} \neq \vec{0} \end{cases}$ mientras que para valores generales de \vec{k} , la función es oscilante y decrece como $V^{-1/3} |\vec{k}|^{-1}$ al aumentar $|\vec{k}|$ (ver figura)

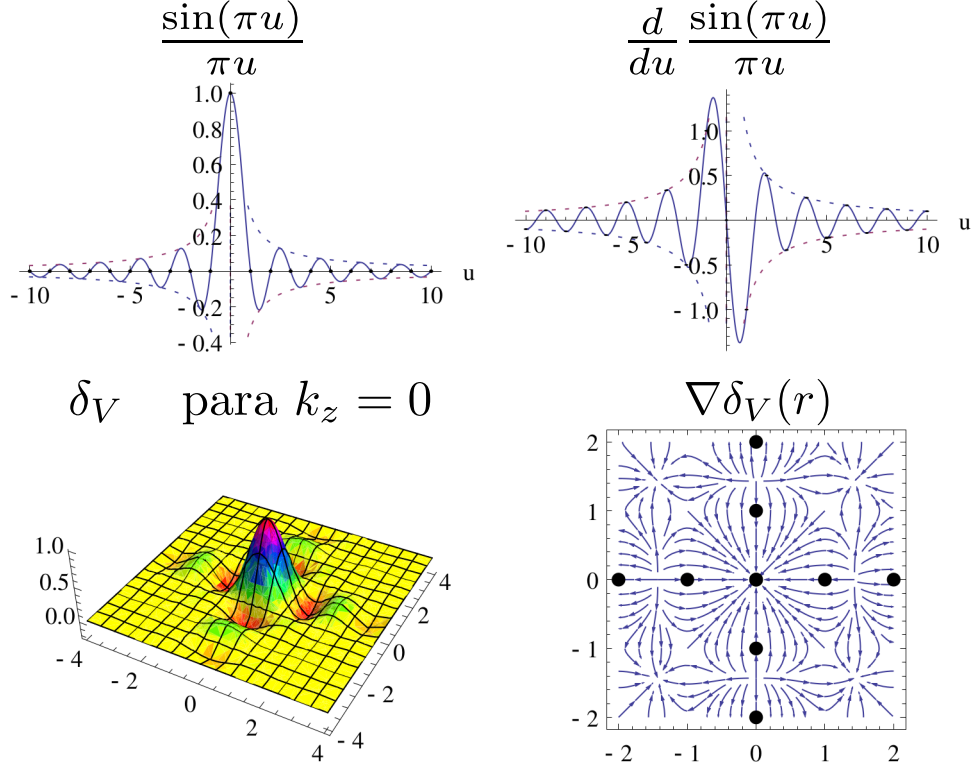


Figure 3: sinc

Como para V finito, $\delta_V^{(3)}(\vec{\kappa})$ es regular, podemos calcular su gradiente. Si bien para valores generales de $\vec{\kappa}$ el gradiente es una función complicada, observamos que sobre los valores involucrados en la suma, $\nabla \delta_V(\vec{k})$ se anula tanto en el origen como en cualquier punto fuera de los ejes principales de coordenadas. Podemos escribir entonces

$$\nabla \delta_V(\vec{k}) = \vec{k} \frac{(-1)^{|\vec{k}|} |\vec{k}|^{V/2\pi}}{|\vec{k}|^2} (\text{sinc}(\vec{k}_x V^{1/2}) \text{sinc}(\vec{k}_y V^{1/2}) + \text{sinc}(\vec{k}_y V^{1/2}) \text{sinc}(\vec{k}_z V^{1/2}) + \text{sinc}(\vec{k}_z V^{1/2}) \text{sinc}(\vec{k}_x V^{1/2}))$$

De esta manera, para cualquier \vec{k} conmensurado, el gradiente es paralelo a \vec{k} y por lo tanto, $\vec{\kappa} \times \nabla_{\vec{\kappa}} \delta_V^{(3)}(\vec{\kappa}) = 0$.

Remplazando estas expresiones en $\vec{\mathbf{L}}_{++}$ encontramos que

$$\vec{\mathbf{L}}_{++} = \hbar \sum_{\substack{\vec{k}_\eta \\ \vec{k}'_{\eta'}}} \mathbf{i} \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') \left(\int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} (\vec{r} \times \nabla) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \frac{d^3 r}{V} \right) \cdot \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}^\dagger \quad (50)$$

$$= \hbar \sum_{\substack{\vec{k}_\eta \\ \vec{k}'_{\eta'}}} \mathbf{i} \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') (-\nabla_\kappa \delta_V^3(\kappa)|_{\kappa=(-\vec{k}'-\vec{k})} \times \vec{k}') \cdot \mathbf{c}_{\vec{k}_\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'_{\eta'}}^\dagger \quad (51)$$

$$= \hbar \sum_{\substack{\vec{k}_\eta \\ \vec{k}'_{\eta'}}} \mathbf{i} \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') (-\nabla_\kappa \delta_V^3(\kappa)|_{\kappa=(-\vec{k}'-\vec{k})} \times \frac{\vec{k}' + \vec{k}}{2}) \cdot \mathbf{c}_{\vec{k}_\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'_{\eta'}}^\dagger \quad (52)$$

$$= 0 \quad (53)$$

donde en la tercera línea hicimos uso de la simetría ante el intercambio de índices en los sumandos.

Consideremos ahora el término $\vec{\mathbf{L}}_{+-}$.

$$\vec{\mathbf{L}}_{+-} = \hbar \sum_{\substack{\vec{k}_\eta \\ \vec{k}'_{\eta'}}} \mathbf{i} \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') \cdot \hat{e}_\eta(\vec{k}) \left(\int e^{-\mathbf{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} (\vec{r} \times \nabla) e^{\mathbf{i}\vec{k}'\cdot\vec{r}} \frac{d^3r}{V} \right) \mathbf{c}_{\vec{k}_\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'_{\eta'}} \quad (54)$$

$$= \hbar \sum_{\substack{\vec{k}_\eta \\ \vec{k}'_{\eta'}}} \mathbf{i} \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') \cdot \hat{e}_\eta(\vec{k}) (\nabla_\kappa \delta_V^3(\kappa)|_{\kappa=(\vec{k}'-\vec{k})} \times \vec{k}') \mathbf{c}_{\vec{k}_\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'_{\eta'}} \quad (55)$$

$$= \hbar \sum_{\substack{\vec{k}'_{\eta'} \\ \vec{k}_\eta}} -\mathbf{i}\vec{k}' \times \nabla_{\vec{k}} \left(\sum_{\vec{k}_\eta} \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') \cdot \hat{e}_\eta(\vec{k}) \delta_V^3(\vec{k}' - \vec{k}) \mathbf{c}_{\vec{k}_\eta}^\dagger \right) \Big|_{\kappa=\vec{k}'} \mathbf{c}_{\vec{k}'_{\eta'}} \quad (56)$$

$$= \hbar \sum_{\substack{\vec{k}'_{\eta'} \\ \vec{k}_\eta}} -\mathbf{i}\vec{k}' \times (\nabla_{\vec{k}} \mathbf{C}_{\eta'}^\dagger(\vec{k})) \mathbf{C}_\eta(\vec{k}') \quad (57)$$

con ⁵

$$\mathbf{C}_{\eta'}(\vec{k}') = \sum_{\vec{k}_\eta} \hat{e}_{\eta'}^*(\vec{k}') \cdot \hat{e}_\eta(\vec{k}) \delta_V^3(\kappa - \vec{k}) \mathbf{c}_{\vec{k}_\eta}$$

En términos de estos operadores, podemos dar la expresión para $\vec{\mathbf{L}}$:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{\vec{k}_\eta} \mathbf{i} \hbar \vec{k} \times (\nabla_{\vec{k}} \mathbf{C}_\eta^\dagger(\vec{k})) \mathbf{C}_\eta(\vec{k}) \quad (58)$$

ó, en términos de los operadores originales

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{\substack{\vec{k}\vec{k}' \\ \eta\eta'}} \mathbf{i} \hbar (\vec{k} \times \vec{k}') \frac{(-1)^{\frac{V^{1/3}}{2\pi} |\vec{k}-\vec{k}'|} \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}(\vec{k}')}{|\vec{k} - \vec{k}'|^2} \mathbf{c}_{\vec{k}_\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'_{\eta'}}$$

donde la suma va sobre los vectores \vec{k} , \vec{k}' tales que $\vec{k} \neq \vec{k}'$ y $\vec{k} - \vec{k}'$ pertenece a uno de los ejes principales de coordenadas.

⁵El término que viene del gradiente actuando sobre los versores de polarización se anula cuando lo evaluamos sobre $\kappa = \vec{k}'$ ya que, o bien la delta se anula, o la derivada del producto escalar con $\vec{k} \rightarrow \vec{k}$ se anula.

El conmutador con $\mathbf{C}_\eta(\vec{k})$ resulta ser

$$[\vec{\mathbf{L}}, \mathbf{C}_\eta(\vec{k})] = -[\vec{\mathbf{L}}, \mathbf{C}_\eta(\vec{k})^\dagger] = -i\hbar\vec{k} \times (\nabla_{\vec{k}} \mathbf{C}_\eta^\dagger(\vec{k}))$$

de manera que, para cualquier versor unitario \hat{n}

$$\left[\frac{i}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{L}}, \mathbf{C}_\eta(\vec{k}) \right] = \hat{n} \cdot (\vec{k} \times \nabla_{\vec{k}} \mathbf{C}_\eta(\vec{k})) = \frac{d}{d\phi} \mathbf{C}_\eta(\vec{k} + \phi \hat{n} \times \vec{k}) \Big|_{\phi \rightarrow 0}$$

lo que muestra que efectivamente $\vec{\mathbf{L}}$ es el generador de las rotaciones espaciales infinitesimales.

Observaciones:

- para $\vec{\kappa} = \vec{k}'$, un vector que satisface la condición de periodicidad, $\mathbf{C}_\eta(\vec{k}) = \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}$.
- $\mathbf{C}_\eta(\kappa)$ es una “generalización continua” de los operadores con índice discreto $\mathbf{c}_{\vec{k},\eta}$, que satisfacen las relaciones de conmutación $[\mathbf{C}_\eta(\vec{\kappa}), \mathbf{C}_{\eta'}(\vec{\kappa}')] = [\mathbf{C}_\eta^\dagger(\vec{\kappa}), \mathbf{C}_{\eta'}^\dagger(\vec{\kappa}')] = 0$, $[\mathbf{C}_\eta(\vec{\kappa}), \mathbf{C}_{\eta'}^\dagger(\vec{\kappa}')] = \delta_{\eta\eta'} \delta_V^3(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}')$, que en el límite de $V \rightarrow \infty$ se reducen a las relaciones de conmutación bosónicas convencionales.
- $\vec{\mathbf{L}}|0\rangle = 0$, lo que surge de notar que $\nabla \delta_V^3(\vec{\kappa})$ se anula en $\vec{\kappa} = 0$.
- $\vec{\mathbf{L}}$ conmuta con el número total de excitaciones $\mathbf{N} = \sum_{\vec{k}\eta} \mathbf{n}_{\vec{k}\eta}$, pero para V finito, en general no conmuta con el Hamiltoniano ni con el operador de spin: esto surge al notar que $[\mathbf{H}_{EM}, \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}] = (\hbar\omega_{\vec{k}} - \hbar\omega_{\vec{k}'}) \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}$ y $[\vec{\mathbf{S}}, \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}] = \hbar(\eta\vec{k} - \eta'\vec{k}') \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}$, por lo que

$$[\mathbf{H}_{EM}, \vec{\mathbf{L}}] = \sum_{\substack{\vec{k}\vec{k}' \\ \eta\eta'}} i\hbar^2 c(\vec{k} \times \vec{k}') \frac{(-1)^{\frac{V^{1/3}}{2\pi}|\vec{k}-\vec{k}'|} \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}(\vec{k}')}{|\vec{k} - \vec{k}'|^2} (|\vec{k}| - |\vec{k}'|) \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}$$

y

$$[\hat{n} \cdot \mathbf{S}, \vec{\mathbf{L}}] = \sum_{\substack{\vec{k}\vec{k}' \\ \eta\eta'}} i\hbar^2 (\vec{k} \times \vec{k}') \frac{(-1)^{\frac{V^{1/3}}{2\pi}|\vec{k}-\vec{k}'|} \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}(\vec{k}')}{|\vec{k} - \vec{k}'|^2} \hat{n} \cdot (\eta\vec{k} - \eta'\vec{k}') \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \mathbf{c}_{\vec{k}'\eta'}$$

que no se anula. Esto es natural si recordamos que la conservación de $\vec{\mathbf{L}}$ es consecuencia de la simetría ante rotaciones del sistema, que rompimos al describir el sistema como dentro de una caja cúbica.

$\vec{\mathbf{L}}$ en el límite $V \rightarrow \infty$

Para recuperar la simetría ante rotaciones, debemos tratar con cuidado el límite $V \rightarrow \infty$. Consideremos primero la componene en z del momento angular, escribiendo explícitamente la dependencia de \vec{k}' con el volumen:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}}_z = & \sum_{\vec{k}} \sum_{\substack{m \\ \eta\eta'}} \mathbf{i}\hbar \frac{(-1)^m}{2\pi m/V^{1/3}} \mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \left(\vec{k}_x \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}(\vec{k} + \frac{2\pi m}{V^{1/3}} \hat{e}_y) \mathbf{c}_{(\vec{k} + \frac{2\pi m}{V^{1/3}} \hat{e}_y)\eta'} \right. \\ & \left. - \vec{k}_y \hat{e}_\eta^*(\vec{k}) \cdot \hat{e}_{\eta'}(\vec{k} + \frac{2\pi m}{V^{1/3}} \hat{e}_x) \mathbf{c}_{(\vec{k} + \frac{2\pi m}{V^{1/3}} \hat{e}_x)\eta'} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

En el límite $V \rightarrow \infty$, al orden más bajo en $1/V^{1/3}$ obtenemos

$$\vec{\mathbf{L}}_z = \sum_{\vec{k}} \sum_{\eta} \mathbf{i}\hbar \frac{(-1)^m}{2\pi m} V^{1/3} \left(\mathbf{c}_{\vec{k}\eta}^\dagger \left(\vec{k}_x \mathbf{c}_{(\vec{k} + \frac{2\pi m}{V^{1/3}} \hat{e}_y)\eta} - \vec{k}_y \mathbf{c}_{(\vec{k} + \frac{2\pi m}{V^{1/3}} \hat{e}_x)\eta} \right) \right)$$

Notamos que en el límite $V \rightarrow \infty$, $\vec{\mathbf{L}}_z$ es divergente. Sin embargo, si consideramos sus elementos de matriz sobre estados para los que $\langle \psi | \mathbf{c}_{\vec{k}\eta} | \psi \rangle$ es una función suficientemente “suave” respecto a \vec{k} , podemos entender el segundo factor como una “derivada”. En tal caso, los modos involucrados en cada término tienen la misma polarización y energías iguales (hasta orden $(2\pi m/V^{1/3})^2$), de manera que $\langle \psi | [\hat{n} \cdot \vec{\mathbf{S}}, \vec{\mathbf{L}}] | \psi \rangle = \langle \psi | [\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}] | \psi \rangle \rightarrow 0$ para estados que satisfagan dicha condición de suavidad. Pero esto es consistente con el requerir que los estados $|\psi\rangle$ sean tales que $\langle \psi | \vec{\mathbf{A}}(\vec{x}) | \psi \rangle$ se anule para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$.