Mecánica cuántica II

Osvaldo Civitarese, Juan Mauricio Matera

10 de enero de 2019

Índice

Notación:

Vectores tridimensionales con “flechita” $\vec{x}$, $\vec{r}$. Versores con “sombrerito” $\hat{e}_x$
Tetravectores en notación covariante (x^μ) Operadores en negrita: $\mathbf{H}$, $\mathbf{c}$, $\vec{\mathbf{A}}$, $\mathbf{x}^\mu$.

1. El Hamiltoniano de Dirac

1. Simetría en el tratamiento de las coordenadas espaciales y temporal (Schödinger ∇^2, ∂_t)
2. Derivadas positivas (Klein Gordon, negativas)
3. Grados de libertad (spin).

Consideramos un vector Ψ de N componentes Ψ_n ($n = 1, \ldots, N$)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix}$$

y expresamos las combinaciones elementales de derivadas espaciales y temporales

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=x,y,z} A^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Psi + \mathbf{i}\frac{mc}{\hbar}B^i\Psi = 0 \tag{1}$$

donde A^i y B son ciertas matrices de $N \times N$. Introducimos el “vector de matrices” $\vec{\alpha} \equiv A^x\hat{e}_x + A^y\hat{e}_y + A^z\hat{e}_z$ y el “escalar” $\beta \equiv B$, de manera que podemos escribir

$$\frac{\mathbf{i}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi + \vec{\alpha}\cdot\nabla\Psi + \mathbf{i}\frac{mc}{\hbar}\beta\Psi = 0 \tag{2}$$

Las N componentes de Ψ describen el estado de un nuevo grado de libertad. Si definimos ahora $\Psi^\dagger = (\Psi_1^*, \ldots, \Psi_N^*)$ el vector “hermítico conjugado” de Ψ, vemos que satisface la ecuación

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi^\dagger + \nabla\Psi^\dagger\cdot\vec{\alpha}^\dagger - \mathbf{i}\frac{mc}{\hbar}\Psi^\dagger\beta^\dagger = 0 \tag{3}$$

Que surge de tomar el Hermítico conjugado de la Ec. 2, recordando que $\vec{\alpha}^i$ y β son matrices de $N \times N$ y que

$$(A.B)^\dagger = B^\dagger.A^\dagger\,.$$

Multiplicando 2 a la izquierda por $\Psi^\dagger$, a 3 por derecha con Ψ y sumando, obtenemos

$$\frac{1}{c}\left(\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\Psi\right)+\left(\Psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\nabla\Psi+(\nabla\Psi^\dagger)\cdot\vec{\alpha}^\dagger\cdot\Psi\right)+\frac{\mathbf{i}mc}{\hbar}\left(\Psi^\dagger\cdot\beta\cdot\Psi-\Psi^\dagger\cdot\beta^\dagger\cdot\Psi\right)=0 \tag{4}$$

Si introducimos la densidad $\rho=\Psi^\dagger\Psi$ (que es necesariamente definida positiva) vemos que $\frac{\partial\rho}{\partial t}=\left(\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\Psi\right)$, de manera que si $\beta=\beta^\dagger$ y $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^\dagger$, la Ec. 5 toma la forma de una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0 \tag{5}$$

donde $\vec{j}=\Psi^\dagger\cdot\vec{\alpha}\cdot\Psi$.

Si multiplicamos ahora la Ec. 2 por $\mathbf{i}\hbar c$ encontramos que

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H_D\Psi \tag{6}$$

con

$$H_D=-\mathbf{i}\hbar c\alpha\cdot\nabla\Psi+m_0c^2\beta$$

que tiene la forma de una Ec. de Schrödinger. En efecto, si llamamos $\vec{P}=-\mathbf{i}\hbar\nabla$,

$$H_D=c\vec{\alpha}\cdot\vec{P}\Psi+m_0c^2\beta \tag{7}$$

Observamos que como $\vec{\alpha}$ y β son matrices Hermíticas, $H_D=H_D^\dagger$. El siguiente paso será elegir $\vec{\alpha}$ y β, de manera que las componentes de Ψ satisfagan la ecuación de Klein Gordon. Para esto, observamos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\mathbf{i}}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}H_D\Psi=-\frac{1}{c^2\hbar^2}H_D^2\Psi\\ &= \sum_{ij}\alpha^i\cdot\alpha^j\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\Psi-\frac{\mathbf{i}m_0c}{\hbar}\sum_i(\alpha^i\cdot\beta+\beta\cdot\alpha^i)\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\beta\cdot\beta\Psi\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones

$$\alpha^i\cdot\beta+\beta\cdot\alpha^i \equiv 0 \tag{8}$$
$$\alpha^i\cdot\alpha^j+\alpha^j\cdot\alpha^i \equiv 2\delta_{ij}\mathbf{1}_{N\times N} \tag{9}$$
$$\beta^2 \equiv \mathbf{1}_{N\times N} \tag{10}$$

la ecuación se reduce a

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\nabla^2+\frac{m0^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi=0$$

que se satisface si cada componente Ψ_n satisface la ecuación de Klein-Gordon con masa m_0. Veamos ahora que las condiciones 8, 9 y 10 imponen restricciones a los posibles valores de N. De 9 y 10 vemos que $\det(\alpha^i)^2=\det(\beta)^2=1$ por lo que estas matrices son invertibles (de hecho, son idempotentes). Luego, de la condición 8

$$\det(\beta)\det(\alpha^i) = \det(\beta\cdot\alpha^i) = \det(-\alpha^i\cdot\beta) = \det(-\mathbf{1}_{N\times N})\det(\beta)\det(\alpha^i) = (-1)^N\det(\beta)\det(\alpha^i)$$

se sigue que N debe ser par. Además,

$$\mathrm{Tr}[\beta] = \mathrm{Tr}[\beta\cdot\alpha_i\cdot\alpha_i] = \mathrm{Tr}[\alpha^i\cdot\beta\cdot\alpha^i] = \mathrm{Tr}[-\beta\cdot\alpha^i\cdot\alpha^i] = -\mathrm{Tr}[\beta]$$

de manera que $\mathrm{Tr}[\beta] = 0$. De la misma manera, $\mathrm{Tr}[\alpha^i] = 0$.

Veamos ahora que la dimensión N mínima para satisfacer las condiciones 8- 10 es 4. Para verlo, observamos que $(A, B) = Tr[A.B]$ define un producto interno para las matrices hermíticas. Recordemos que en un espacio vectorial con producto interno, un conjunto de m vectores ortogonales es necesariamente un conjunto linealmente independiente. Tomando traza a ambos lados de la condición 9, vemos que α^i son tres matrices ortogonales, que a su vez son ortogonales con β. Pero como las cuatro matrices son de traza nula, también son ortogonales con la matriz identidad $\mathbf{1}_{N\times N}$, lo que significa que el espacio de matrices de $N\times N$ admite al menos 5 matrices linealmente independientes. Por lo tanto, el espacio de matrices más pequeño con N par, que admita cinco matrices linealmente independientes es el de las matrices hermíticas de 4×4.

Para ver que efectivamente en el espacio de matrices de 4×4 existen cuatro matrices que satisfagan las condiciones, construimos un ejemplo: $\beta = \sigma_x\otimes\mathbf{1}_{2\times 2}$, $\alpha^i = \sigma_z\otimes\sigma_i$, donde $\sigma_{i=x,y,z}$ representan las matrices de Pauli $\sigma_x = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_y = -\mathbf{i}\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_z = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$. Un cálculo directo muestra que efectivamente estas matrices satisfacen las condiciones.

1.1. Ecuación de Dirac en forma Covariante.

Adoptamos ahora la notación $x^\mu = (ct, \vec{x})$ (vector contravariante), $x_\mu = (ct, -\vec{x})$ (vector covariante), y la "métrica"

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$$

de manera que $g_{\mu\nu}x^\mu = x_\nu$. Definimos ahora

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha}) = (\gamma^0, \vec{\gamma})$$

Vemos que $(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 = (\gamma^0)^{-1}$ y $(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = (\alpha^i\beta) = (-\beta\alpha^i) = -\gamma^i = (\gamma^i)^{-1}$, de lo que se sigue que

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$$

De las condiciones 8-10 se sigue tambien que (probar como ejercicio)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_{4\times 4}$$

Si ahora multiplicamos la Ec 6 con β/c por izquierda, encontramos que

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\frac{\hbar}{c}\beta\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\mathbf{i}\hbar\beta\alpha\cdot\nabla\Psi-m_0c\beta^2)\Psi &= \mathbf{i}\frac{\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\mathbf{i}\hbar\gamma^i\cdot\nabla\Psi-m_0c)\Psi \\ &= (\mathbf{i}\hbar\gamma^\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}-m_0c)\Psi\end{aligned}$$

Análogamente, el adjunto de la Ec tiene la forma

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial x^\mu}\gamma^0\gamma^\mu+m_0c\Psi^\dagger=0$$

Introduciendo la notación $\overline{\Psi}=\Psi^\dagger\gamma^0$, podemos escribir

$$\mathbf{i}\hbar\gamma^\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}-m_0c\Psi = 0 \qquad (11)$$

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu+m_0c\overline{\Psi} = 0 \qquad (12)$$

1.2. Fórma explícita de las matrices de Dirac

Consideremos ahora las cuatro matrices γ^0, γ^1, γ^2, γ^3 y todos sus posibles productos. Las relaciones de (anti) conmutación implican que cualquier producto de estas matrices que tenga factores repetidos puede reducirse a uno con todos los factores distintos. De esta manera, el álgebra generada por γ^μ tiene como por base a las matrices Hermíticas

Γ	Expresión	#
Γ^{1-4}	γ^0, $\mathbf{i}\gamma^1$,$\mathbf{i}\gamma^2$,$\mathbf{i}\gamma^3$	4
Γ^5	$\gamma^5=\mathbf{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	1
Γ^{6-11}	$\gamma^0\gamma^1=\alpha^1$, $\gamma^0\gamma^2=\alpha^2$, $\gamma^0\gamma^1=\alpha^3$ $-\mathbf{i}\gamma^1\gamma^2=2\Sigma^{12}$, $-\mathbf{i}\gamma^2\gamma^3=2\Sigma^{23}$, $-\mathbf{i}\gamma^3\gamma^1=2\Sigma^{31}$	6
Γ^{12-15}	$\mathbf{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2=\gamma^1\gamma^5$, $\mathbf{i}\gamma^0\gamma^3\gamma^1=\gamma^2\gamma^5$, $\mathbf{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2=\gamma^3\gamma^5$, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3=-\mathbf{i}\gamma^0\gamma^5$	4
$\mathbf{\Gamma}^{16}$	$\mathbf{1}_{4\times4}$	1

Analizando su ortogonalidad respecto al producto interno $(A,B)=\mathrm{Tr}[AB]$ vemos que efectivamente las matrices Γ^k son un conjunto linealmente independiente de 16 matrices Hermíticas, por lo que son base del espacio de matrices de 4×4.

Propiedades de Conmutación de las Γ^k

$$\begin{cases}\Gamma^l\Gamma^m=a\Gamma_n & \text{para algún } n \text{ y } a \text{ en } \{1,-1,\mathbf{i},-\mathbf{i}\}\\ \Gamma^l\Gamma^m=\mathbf{1}_{4\times4} & \text{si y sólo si l=m}\\ \Gamma^l\Gamma^m=\pm\Gamma^m\Gamma^l & \\ \Gamma_k\Gamma_l\Gamma_k=-\Gamma_l & \text{para algún k si } \Gamma_l\neq\mathbf{1}_{4\times4}\end{cases} \qquad (13)$$

La primera propiedad viene de reescribir las matrices Γ_l como producto de las γ^μ e $\mathbf{i}$, usando las reglas de (anti)conmutación, y teniendo en cuenta que

$(\gamma^\mu)^2 = \pm \mathbf{1}_{4\times 4}$. De la misma manera, la segunda linea se sigue del caracter autoadjunto de las Γ^l, y de que la identidad se obtiene sólo si los factores en Γ^l se cancelan exactamente con los factores en Γ^k, lo que ocurre sólo si son la misma matriz. La última linea, la probamos notando que

$$\begin{aligned} \gamma^5\gamma^\mu\gamma^5 &= -\gamma^\mu \\ \gamma^0\gamma^5\gamma^0 &= -\gamma^5 \\ \gamma^\mu(\gamma^5\gamma^\mu)\gamma^\mu &= -(\gamma^5\gamma^\mu) \end{aligned}$$

1.2.1. Teoremas

(A) $\mathrm{Tr}[\Gamma_l] = 0 \forall_{l=0\ldots 15}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\Gamma_l] &= -\mathrm{Tr}[\Gamma_k\Gamma_l\Gamma_k] \\ &= -\mathrm{Tr}[\Gamma_l\Gamma_k\Gamma_k] \\ &= -\mathrm{Tr}[\Gamma_l \mathbf{1}_{4\times 4}] = -\mathrm{Tr}[\Gamma_l] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}[\Gamma_l] = 0\,.$$

(B) Γ_l son un conjunto linealmente independiente:

$$\sum_{l=1}^{16} x_l\Gamma_l = 0 \Leftrightarrow \forall_l x_l = 0$$

Demostración: Personalmente me parece más elegante el argumento de la ortogonalidad. Si $\forall_m x_m = 0$, es claro que $\sum_{l=1}^{16} x_l\Gamma_l = 0$. Por otro lado, si $\sum_{l=1}^{16} x_l\Gamma_l = 0 \to \forall_m \mathrm{Tr}[\Gamma_m(\sum_{l=1}^{16} x_l\Gamma_l)] = 0$, pero

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\Gamma_m(\sum_{l=1}^{16} x_l\Gamma_l)] &= \sum_{l=1}^{16} x_l \mathrm{Tr}[\Gamma_m\Gamma_l] \\ &= x_m \mathrm{Tr}[\Gamma_m\Gamma_m)] + \sum_{l=1, l\neq m}^{16} x_l \mathrm{Tr}[\Gamma_m\Gamma_l] \\ &= x_m \mathrm{Tr}[\mathbf{1}_{4\times 4}] \end{aligned}$$

por lo que $\forall_m x_m = 0$.

Aplicaciones

1. *Dimensión*: El espacio de matrices cuadradas de dimensión más baja en la que podemos acomodar 16 matrices linealmente independientes es el de las matrices de 4×4.

2. *Corolario ?*: Cualquier matriz de 4×4 puede escribirse como combinación lineal de las Γ_l. Los coeficientes se pueden recuperar vía las relaciones de ortonormalidad:

$$M = \sum_{l=1}^{16} x_l \Gamma_l$$

con $x_l = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\Gamma_l M)$.

(C) Si una matriz X conmuta con todas las matrices $\gamma^\mu \Rightarrow$ conmuta con todas las $\Gamma_i \Rightarrow \mathbf{X} = \lambda \mathbf{1}_{4\times 4}$. Demostración: Supongamos que $X = \Gamma_i X \Gamma_i$. Podemos escribir

$$X = x_m \Gamma_m + \sum_{l \neq m} x_l \Gamma_m$$

con $\Gamma_m \neq \mathbf{1}_{4\times 4}$. Pero sabemos que existe Γ_k tal que $\Gamma_k \Gamma_m \Gamma_k = -\Gamma_m$ por lo que, como supusimos que $[\Gamma_k, X] = 0$,

$$\Gamma_k X \Gamma_k = X \Gamma_k \Gamma_k = X \mathbf{1}_{4\times 4} = X$$

de manera que

$$X = x_m \Gamma_k \Gamma_m \Gamma_k + \sum_{l \neq m} x_l \Gamma_k \Gamma_m \Gamma_k = -x_m \Gamma_m + \sum_{l \neq m} \pm x_l \Gamma_l$$

lo que implica que $x_m = 0$ a menos que $\Gamma_m = \mathbf{1}_{4\times 4}$.

1.2.2. Teorema Fundamental de Pauli

Si $\{\gamma^\mu\}$ y $\{\tilde{\gamma}^\mu\}$ son dos conjuntos de matrices que satisfacen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_{4\times 4}$, existe una matriz S tal que

$$\tilde{\gamma}^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}$$

con $S = \sum_{i=1}^{16} \tilde{\Gamma}_i F \Gamma_i$, donde F es una matriz de 4×4 y $\tilde{\Gamma}_i$ es la base del espacio de matrices de 4×4 generada por las $\{\tilde{\gamma}^\mu\}$.

Demostración: En las notas, falta la demostración Supongamos que S satisface $\tilde{\gamma}^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}$ para cada μ. Si esto es así, también será cierto que $\tilde{\Gamma}_k = S \Gamma_k S^{-1}$ Multiplicando esta identidad por izquierda con S y por derecha con $\tilde{\Gamma}_k$ obtenemos

$$S = \tilde{\Gamma}_k S \Gamma_k$$

válida para cada k. Observamos ahora que

$$S = \sum_{i=1}^{16} \tilde{\Gamma}_i F \Gamma_i$$

satisface esa propiedad, ya que como $\tilde{\Gamma}_k \tilde{\Gamma}_i = a_{ki} \tilde{\Gamma}_{\sigma_k(i)}$ y $\Gamma_i \Gamma_k = (\Gamma_k \Gamma_j)^\dagger = (a_{ki} \Gamma_{\sigma_k(i)})^\dagger = a_{ki}^* \Gamma_{\sigma_k(i)}$ con $\sigma_k(i)$ una permutación y $a_{ki} \in \{1, -1, \mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$,

$$\tilde{\Gamma}_k S \Gamma_k = \sum_{i=1}^{16} \tilde{\Gamma}_k \tilde{\Gamma}_i F \Gamma_i \Gamma_k$$

$$= \sum_{i=1}^{16} \tilde{\Gamma}_{\sigma_k(i)} F \Gamma_{\sigma_k(i)}$$
$$= \sum_{i=1}^{16} \tilde{\Gamma}_i F \Gamma_i = S$$

Para ver ahora que S es no singular, observamos que $S^\dagger = \sum_{i=1}^{16} \Gamma_i F^\dagger \tilde{\Gamma}_i$ satisface $S^\dagger = \Gamma_i S^\dagger \tilde{\Gamma}_i$, de manera que $S^\dagger S = \Gamma_i S^\dagger \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_i S \Gamma_i = \Gamma_i S^\dagger S \Gamma_i$ de manera que $S^\dagger S = \alpha \mathbf{1}$. Eligiendo F apropiadamente, $\alpha \neq 0$ y $S^{-1} = S^\dagger/\alpha$. De la misma manera, podemos probar que independientemente de la elección de F, S es única a menos de una constante: Si

$$S_1 \gamma^\mu S_1^{-1} = S_2 \gamma^\mu S_2^{-1} \Rightarrow \forall_\mu \gamma^\mu (S_1^{-1} S_2) = (S_1^{-1} S_2) \gamma^\mu$$

luego $(S_1^{-1} S_2) = \alpha \mathbf{1}_{4\times4}$.

2. Representaciones de las matrices de Dirac

2.1. Representación Estandard de Dirac

Representación explícita de las matrices de Dirac. Representación de Dirac. Una forma de construir matrices de 4×4 que satisfagan el álgebra de Clifford se basa en que las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = -\mathbf{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

satisfacen un álgebra de anticonmutación $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \delta_{ij}$. Si elegimos ahora $\beta = \gamma_0 = \sigma_z \otimes \mathbf{1}_{2\times2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix}$ y $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i = \sigma_x \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ vemos que efectivamente $\beta^2 = (\alpha^i)^2 = \mathbf{1}_{4\times4}$, y $\{\beta, \alpha^i\} = \{\alpha^i, \alpha^j\} = \mathbf{0}_{4\times4}$.

Esta representación es conocida como la "Representación de Dirac" de las matrices de Dirac. En esta representación,

$$\gamma^i = (\mathbf{i}\sigma_y) \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = \sigma_x \otimes \mathbf{1}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2\times2} \\ \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{ij} = \frac{-\mathbf{i}}{2} \gamma^i \gamma^j = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathbf{1}_{2\times2} \otimes \sigma_k = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_i/2 & 0 \\ 0 & \sigma_i/2 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{i}\gamma^5 \gamma^0 = -\sigma_y \otimes \mathbf{1}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i}\mathbf{1}_{2\times2} \\ -\mathbf{i}\mathbf{1}_{2\times2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 \gamma^i = -\sigma_z \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

2.2. Representación de Weil

Otra representación posible de las matrices de Dirac es la *Representación Quiral* o *Representación de Weil*,

$$\gamma^0 = \sigma_x \otimes \mathbf{1}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1_{2\times 2}} \\ \mathbf{1_{2\times 2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = (\mathbf{i}\sigma_y) \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

La representación de Weil tiene la propiedad de que la matriz γ^5 es diagonal:

$$\gamma^5 = -\sigma_z \otimes \mathbf{1}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1_{2\times 2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{1_{2\times 2}} \end{pmatrix}$$

Esto se traduce en que en el límite de $m_0 \to 0$, el Hamiltoniano de Dirac 7 se bloquea en dos subespacios de dimensión 2:

$$\mathbf{H}_{Dirac} = -\mathbf{i}\hbar c \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\nabla & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma}\cdot\nabla \end{pmatrix}$$

2.3. Representación de Majorana

Otra representación importante es la llamada representación de Majorana:

$$\gamma^0 = \sigma_x \otimes \sigma_y$$

$$\gamma^1 = \mathbf{i}\mathbf{1}_{2\times 2} \otimes \sigma_z$$

$$\gamma^2 = \mathbf{i}\sigma_y \otimes \sigma_y$$

$$\gamma^3 = -\mathbf{i}\mathbf{1}_{2\times 2} \otimes \sigma_x$$

En esta representación, la ecuación de Dirac es una ecuación diferencial real,

$$\begin{pmatrix} \hbar(\sigma_z \frac{\partial}{\partial x} - \sigma_x \frac{\partial}{\partial z}) - m_0 c & \hbar\mathbf{i}\sigma_y(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}) \\ \hbar\mathbf{i}\sigma_y(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}) & \hbar(\sigma_z \frac{\partial}{\partial x} - \sigma_x \frac{\partial}{\partial z}) - m_0 c \end{pmatrix} \Psi = 0 \qquad (14)$$

de manera que sus soluciones son espinores reales. Veremos más adelante que una partícula que satisface la Ec. de Majorana es necesariamente neutra.

3. Transformaciones de Lorentz y covarianza de la Ec. de Dirac

Si Λ^μ_α es una transformación de Lorentz (esto es, una transformación lineal que preserva la métrica de Minkowski $g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\alpha\beta}$) que transforma las coordenadas x^α en

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha$$

queremos encontrar una transformación lineal S_Λ que actúe sobre los espinores Ψ de manera que si

$$(\mathbf{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0 c)\Psi(x^\mu) = 0$$

se cumpla que

$$(\mathbf{i}\hbar\gamma^\mu\tilde{\partial}_\mu - m_0c)(S_\Lambda\Psi(\tilde{x}^\mu)) = 0$$

de manera que la ecuación resulte invariante de Lorentz.

Observamos ahora que la ecuación transformada, en términos de las variables originales tiene la forma

$$(\mathbf{i}\hbar(\gamma^{\mu'}S_\Lambda)(\Lambda_{\mu'}{}^{\alpha'}\partial_{\alpha'}) - m_0c)(\Psi(\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha)) = 0$$

donde $\Lambda_{\mu'}{}^{\alpha'}$ es la matriz inversa de $\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha'}$. Multiplicando por izquierda con S_Λ^{-1}, encontramos que la ecuación será invariante si

$$S_\Lambda^{-1}(\gamma^{\mu'}\Lambda_{\mu'}{}^{\mu})S_\Lambda = \gamma^\mu$$

Observamos ahora que si γ^μ satisfacen las condiciones de anticonmutación de Clifford, $\tilde{\gamma}^\mu = (\gamma^{\mu'}\Lambda_{\mu'}{}^{\mu})$ también lo hacen, por lo que resultan ser una nueva representación. Pero por el Teorema Fundamental de Pauli, existe S tal que

$$\tilde{\gamma}^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$$

Identificando $S_\Lambda \equiv S$ vemos que la ecuación es en efecto invariante.

Observación: Como dijimos al principio del capítulo, las matrices γ^μ no forman un "cuadrivector" en el sentido que, dada una representación inicial, las cuatro matrices quedan invariantes ante transformaciones de Lorentz.

Recordemos ahora que las transformaciones de Lorentz forman un grupo, con un subgrupo continuo que incluye a las rotaciones y a los boots, y un subgrupo discreto que incluye a la operación de paridad espacial $\vec{x} \leftrightarrow -\vec{x}$ y a la inversión temporal $t \leftrightarrow -t$. Una transformación de Lorentz puede descomponerse entonces en una secuencia de transformaciones infinitesimales, seguida por la acción de una o ambas transformaciones discretas. Analicemos cada uno de esos casos.

3.1. Transformaciones infinitesimales continuas

Una trasformación en el subgrupo continuo $\Lambda^\mu{}_{\mu'}$ puede pensarse como la composición de un gran número de transformaciones infinitesimales

$\Lambda^\mu{}_{\mu'} = \text{lím}_{N\to\infty}(\Lambda_{1/N})^\mu{}_{\mu'_1}(\Lambda_{1/N})^{\mu'_1}{}_{\mu'_2}\dots(\Lambda_{1/N})^{\mu'_{N-1}}{}_{\mu'}$ o

$$\Lambda^\mu{}_{\mu'} = \exp(M^\mu{}_{\mu'})$$

de manera que $(\Lambda_{1/N})^\mu{}_{\mu'}x^{\mu'} = x^\mu + \frac{1}{N}M^\mu{}_{\mu'}x^{\mu'} + \mathcal{O}(1/N^2)$

Como $(\Lambda_{1/N})^\mu{}_{\mu'}$ preserva la métrica, $(\Lambda_{1/N})^\nu{}_{\nu'}(\Lambda_{1/N})^\mu{}_{\nu'}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{N}(M^\mu{}_{\mu'}g_{\mu\nu'} + g_{\mu'\nu}M^\nu{}_{\nu'}) + \mathcal{O}(1/N^2) = g_{\mu\nu}$ lo que significa que $M_{\mu'\nu'} = M^{\nu'}{}_\nu g_{\mu'\nu}$ debe ser una matriz antisimétrica. La correspondiente matriz $S_{\Lambda_{1/N}}$ será tal que

$$\gamma^{\mu'} = S_{\Lambda_{1/N}}^{-1}(\Lambda_{1/N})^{\mu'}{}_\mu\gamma^\mu S_{\Lambda_{1/N}}$$

por lo que esperamos que $S_\Lambda = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{i}M_{\mu\nu}}{N}\Sigma^{\mu\nu} + \mathcal{O}(1/N^2)$ con $\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu}$ un conjunto de operadores que actúan sobre el espinor. Remplazando obtenemos

$$0 \quad = \quad M_{\nu\nu'}(g^{\mu'\nu}\gamma^{\nu'} - \mathbf{i}[\gamma^{\mu'}, \Sigma^{\nu\nu'}])$$

de manera que $\delta^\nu_\mu \gamma^{\nu'} = g_{\mu'\mu}[\gamma^{\mu'}, \Sigma^{\nu\nu'}]$, que debe satisfacerse para cualquier elección de los índices μ, ν y ν' con $\nu \neq \nu'$. Si $\nu = 0$,

$$\gamma^i = [\gamma^0, \mathbf{i}\Sigma^{0i}]$$

y

$$0 = [\gamma^i, \mathbf{i}\Sigma^{0i}]$$

que se satisfacen si $\Sigma^{0i} = -\mathbf{i}\frac{\gamma^0\gamma^i}{2} = -\mathbf{i}\frac{\alpha^i}{2}$. De manera análoga, si $\nu, \nu' \neq 0$,

$$\gamma^i = -[\gamma^i, \mathbf{i}\Sigma^{ij}]$$

$$0 = [\gamma^0, \Sigma^{ij}]$$

$$0 = [\gamma^k, \Sigma^{ij}] \quad (k \neq i, j)$$

que se satisfacen si $\Sigma^{ij} = -\mathbf{i}\frac{\gamma^i\gamma^j}{2}$

Notemos ahora que si la transformación Λ es generada por una matriz $M_{\mu\nu}$ tal que las componentes temporales $M_{0\nu} = 0$, no mezcla la parte espacial con la parte temporal de los tetravectores: la subalgebra correspondiente genera el grupo de rotaciones en las 3 dimensiones espaciales. Si reescribimos los generadores correspondientes como $\Sigma^{ij} = s_k\varepsilon^{0ijk} = s_k\varepsilon^{ijk}$ descubrimos que

$$[s_k, s_{k'}] = \mathbf{i}\varepsilon^{kk'l}s_l$$

que satisfacen efectivamente el álgebra de Lie de las rotaciones. Además, como $s_k^\dagger = (\Sigma^{ij}\frac{\varepsilon_{ijk}}{2})^\dagger = s_k$, $S = \exp(\mathbf{i}M_{\mu\nu}\frac{\varepsilon^{0\mu\nu i}}{2}s_i)$ es una transformación unitaria $S^\dagger S = \mathbf{1}_{4\times 4}$.

Por otro lado, si la transformación es generada por $M_{\mu\nu}$ tal que las componentes espaciales $M_{ij} = 0$, la transformación de Lorentz se corresponde con un boost puro. En este caso, los generadores de S son de la forma $\mathbf{i}\alpha_i$, que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{i}\alpha_k, \mathbf{i}\alpha_{k'}] = \mathbf{i}\varepsilon^{kk'l}s_l$$

que coinciden con las relaciones de conmutación para los generadores de boosts. Vemos que en este caso, como $(\mathbf{i}\alpha_i)^\dagger = -\mathbf{i}\alpha_i$ la transformación es generada por una matriz anti-hermítica, por lo que $S = \exp(M_{\mu\nu}\frac{\varepsilon^{0\mu\nu i}}{2}\alpha_i)$ resulta ser una matriz hermítica no unitaria.

3.2. Transformación de Paridad, Inversión temporal y conjugación de carga

La matriz de transformación asociada a esta transformación es de la forma $\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{3\times3} \end{pmatrix}$, de manera que buscamos una matriz S_P tal que $S_P \gamma^0 S_P = \gamma^0$ y $S_P \gamma^i S_P = -\gamma^i$. Vemos que eligiendo $S_P = \gamma_0$ satisfacemos ambas condiciones independientente de la representación que elijamos.

Con la misma idea, podemos proponer que si $\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{3\times3} \end{pmatrix}$ es la transformación de Lorentz asociada a la inversión temporal, la operación S_P que transforma las γ^μ deberá satisfacer $\tilde{S}_\mathcal{T} \gamma^0 \tilde{S}_\mathcal{T}^{-1} = -\gamma^0$ y $\tilde{S}_\mathcal{T} \gamma^i \tilde{S}_\mathcal{T}^{-1} = \gamma^i$. Eligiendo $\tilde{S}_\mathcal{T} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \tilde{S}_\mathcal{T}^{-1}$ vemos que se satisfacen las condiciones, y nuevamente es independiente de la representación. Sin embargo, esto no es suficiente. A nivel clásico, la inversión temporal deja invariante las componentes espaciales de los vectores posición, pero no los de los vectores momento, que cambian de signo.

A nivel cuántico, esta inversión se traduce en un cambio de signo en las relaciones de conmutación: $[x, -p] = -[x, p] = -\mathbf{i}\hbar = [x, p]^\dagger$. Esto sugiere que la inversión temporal se implementa a nivel cuántico como la conjugación compleja de las componentes de los espinores, seguida por una transformación $\mathcal{S}_\mathcal{T}$, esto es, una transformación "anti-unitaria":

$$\mathcal{T}\Psi = \mathcal{S}_\mathcal{T}\Psi^c$$

de manera que

$$\mathcal{T}(-\hat{p})\mathcal{T}^{-1}\Psi = \mathcal{T}(\mathbf{i}\hbar\nabla(\mathcal{T}^{-1}\Psi)) = \mathcal{S}_\mathcal{T}(\mathbf{i}\hbar\nabla(\mathcal{S}_\mathcal{T}^{*-1}\Psi)^*)^* = \hat{p}\Psi$$

y

$$\mathcal{T}(\hat{x})\mathcal{T}^{-1}\Psi = \mathcal{T}(\vec{x}(\mathcal{T}^{-1}\Psi)) = \mathcal{S}_\mathcal{T}(\vec{x}\mathcal{S}_\mathcal{T}^{*-1}\Psi^*)^* = \hat{x}\Psi$$

La operación de conjugación, sin embargo, no deja en general invariantes a las matrices γ^μ ya que

$$(\gamma^\mu\Psi^c)^c = (\gamma^\mu)^c\Psi$$

pero como $(\gamma^\mu)^c$ también cierra un álgebra de Clifford, es posible encontrar una matriz $\mathcal{S}_c$ tal que

$$(\gamma^\mu)^c = \mathcal{S}_c\gamma^\mu\mathcal{S}_c^{-1}$$

Como la conjugación compleja es "involutiva" (esto es, $(\Psi^*)^* = \Psi$) es natural pedir además que $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_c^* = \mathcal{S}_c(\mathcal{S}_c\mathcal{S}_c\mathcal{S}_c^{-1}) = \mathcal{S}_c^2 = \mathbf{1}$ de manera que el efecto de "conjugar" dos veces seguidas un dado espinor lo deje invariante.

A diferencia de la operación de paridad, que tomaba una expresión en términos de las γ^μ independiente de la representación, la expresión que describe a $\mathcal{S}_c$ depende de la representación elegida para las γ^μ. En las representaciones de Dirac y Weil, γ^0, γ^1 y γ^3 son reales, mientras que γ^2 es imaginaria, de manera que esta última es la única que cambia de signo bajo conjugación. Eligiendo entonces $\mathcal{S}_c^{(Dirac/Weil)} = \mathbf{i}\gamma^5\gamma^2 = ((\mathcal{S}_c^{(Dirac/Weil)})^{-1}) = (\mathcal{S}_c^{(Dirac/Weil)})^*$ vemos que $(\gamma^\mu)^c = \mathcal{S}_c^{(Dirac/Weil)}\gamma^\mu\mathcal{S}_c^{(Dirac/Weil)}$. Por otro lado, en la representación de Majorana, todas las γ^μ son imaginarias puras, de manera que ante conjugación, cambian de signo, de manera que podemos elegir $\mathcal{S}_c^{(Majorana)} = \gamma^5 = (\mathcal{S}_c^{(Majorana)})^{-1} = (\mathcal{S}_c^{(Majorana)})^{-1}$.

Finalmente, componiendo $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{T}}$ con $\mathcal{S}_c$ encontramos que

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}} = \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{T}}\mathcal{S}_c$$

cuya forma dependerá de la representación. En las representaciones de Dirac/Weil,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}}^{Dirac/Weil} = \mathbf{i}\gamma^0\gamma^2$$

mientras que en la de Majorana

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}}^{Majorana} = \gamma^0$$

Consideremos ahora la combinación de las operaciones de paridad e inversión temporal:

$$\mathcal{C}\Psi = \mathcal{P}\mathcal{T}\Psi = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\mathcal{S}_c\Psi^* = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\mathcal{S}_c\Psi^* = \gamma^5\mathcal{S}_c\Psi^*$$

Veremos luego que esta transformación tiene el efecto de “cambiar el signo” a la carga eléctrica por lo que se conoce como “conjugación de carga”.De la misma manera que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$ satisface $\mathcal{C}^2 = \mathbf{1}$, lo que se puede probar usando las propiedades de $\mathcal{S}_c$ y γ^5. Esto prueba el llamado “Teorema CPT” para la Ec. de Dirac: el efecto simultaneo de la inversión temporal, la inversión espacial y el cambio de signo de la carga de la partícula que describe la ecuación deja invariante la forma del espinor.

revisar esto...

4. Soluciones de la Ec. de Dirac Libre

Las soluciones más simples de la Ec. de Dirac son las ondas planas

$$\Psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} e^{\mathbf{i}\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} e^{-\mathbf{i}Et/\hbar}$$

Notamos que al introducir estas soluciones en la Ec de Dirac, esta se reduce a un conjunto de ecuaciones algebráicas:

$$(\mathbf{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = (E/c\gamma^0 - \gamma^i\vec{p}_i - m_0c)\Psi = 0 \tag{15}$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} (E/c - m_0c)\mathbf{1}_{2\times 2} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -(E/c + m_0c)\mathbf{1}_{2\times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde (ϕ, ξ) son dos espinores de dos componentes. Para resolver la ecuación, observamos que podemos despejar ξ en función de ϕ:

$$\xi = \frac{\sigma \cdot \vec{p}}{E/c + m_0 c}\phi = \begin{pmatrix} p_z & p_x - \mathbf{i}p_y \\ p_x + \mathbf{i}p_y & p_z \end{pmatrix} \frac{\phi}{E/c + m_0 c}$$

luego,

$$\phi = \frac{(\sigma \cdot \vec{p})^2}{E^2/c^2 - m_0^2 c^2}\phi = \frac{|\vec{p}|^2}{E^2/c^2 - m_0^2 c^2}\phi$$

lo que significa que ϕ puede ser cualquier vector complejo, si $E = \pm\sqrt{c^2|\vec{p}|^2 + m_0^2 c^4}$. El espinor completo resulta ser de la forma

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{c\sigma \cdot \vec{p}}{E + m_0 c^2}\phi \end{pmatrix} e^{\mathbf{i}\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} e^{-\mathbf{i}Et/\hbar}.$$

Si usamos como base de ϕ los autovectores de $\sigma \cdot \vec{p}$ $\phi_\pm = \frac{(p_z \pm |\vec{p}|, p_x + \mathbf{i}p_y)}{\sqrt{2p(p \pm p_z)}}$,

$$\Psi_{E,\pm}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \phi_\pm \\ \frac{\pm c|p|}{E + m_0 c^2}\phi_\pm \end{pmatrix} e^{\mathbf{i}\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} e^{-\mathbf{i}Et/\hbar}$$

De esta manera, para cada valor de la energía tenemos una degeneración doble.

Normalización

Debido a la forma de las soluciones,

$$|\Psi_{E\pm}(\vec{r})|^2 = (1 + \frac{c^2 p^2}{(E + m_0 c^2)^2}) = \text{cte}$$

que podemos normalizar a 1 dividiendo los espinores por $\sqrt{1 + \frac{c^2 p^2}{(E + m_0 c^2)^2}}$. Notemos que si $p \ll m_0 c$ y $E > 0$, la constante de normalzación es próxima a 1.

-

4.1. Momento angular

5. Invarianza de Gauge y Acoplamiento Electromagnético

La ecuación de Dirac, como la escribimos al principio del capítulo, es invariante ante la transformación de "gauge" global

$$\Psi(x) \to \tilde{\Psi}(x) = e^{-\mathbf{i}\varphi}\Psi(x)$$

con φ una constante, en el sentido de que este cambio no se refleja en ningún observable físico. De manera análoga a como lo hicimos con la ecuación de Klein-Gordon, es posible promover esta simetría "global" a una simetría "local" de gauge

$$\Psi(x) \to \tilde{\Psi}(x) = e^{-\mathbf{i}\Lambda(x^\mu)}\Psi(x) \tag{16}$$

si cambiamos las derivadas ∂_μ por "derivadas covariantes" $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{q}{\hbar}\mathbf{i}A_\mu(x^\mu)$, de manera que ante la transformación de gauge 16 $A_\mu(x^\mu)$ cambie a $A_\mu(x^\mu) \to \tilde{A}_\mu(x^\mu) = A_\mu(x^\mu) + \frac{\hbar}{q}\partial_\mu\Lambda(x^\mu)$.

La ecuación de Dirac modificada toma entonces la forma

$$(c\gamma^\mu(\mathbf{i}\hbar\partial_\mu - qA_\mu) - mc^2)\Psi = 0 \tag{17}$$

o, en su forma de Schrödinger, (llamando $A_\mu = (\Phi(x^\mu)/c, -\vec{A}(x^\mu))$)

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (c\vec{\alpha}\cdot(-\mathbf{i}\hbar\nabla - q\vec{A}(x^\mu)) + \gamma^0 mc^2 + q\Phi(x^\mu))\Psi \tag{18}$$

Si $A_\mu = \frac{\hbar}{q}\partial_\mu\Lambda(x^\mu)$ para alguna función $\Lambda(x^\mu)$, podemos llevar esta ecuación a su forma original mediante la transformación de gauge 16. Sin embargo, si asumimos que $A_\mu(x^\mu)$ transforma adecuadamente ante las transformaciones de simetría que dejaban invariante a la ecuación de Dirac, cualquier elección de $A_\mu(x^\mu)$ nos provee de una ecuación válida (en el sentido que respeta todas las simetrías de la ecuación original, más la de invarianza de gauge local), siendo la situación física concreta que queremos describir lo que selecciona quién debe ser $\vec{A}_\mu$.

Al incluir los nuevos términos, es de esperarse que las soluciones de la nueva ecuación no satisfagan las ecuaciones de Klein-Gordon correspondientes. Para verlo, observamos que

$$\begin{aligned}
0 &= -(\mathbf{i}\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{\mathbf{i}q}{\hbar}A_\mu) - m_0c)^2\Psi \\
&= \hbar^2(\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{\mathbf{i}q}{\hbar}A_\mu))^2\Psi - m_0^2c^2\Psi + 2m_0c\left(\mathbf{i}\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{\mathbf{i}q}{\hbar}A_\mu)\right)\Psi \\
&= \frac{\hbar^2\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}}{2}(\partial_\mu + \frac{\mathbf{i}q}{\hbar}A_\mu)(\partial_\nu + \frac{\mathbf{i}q}{\hbar}A_\nu)\Psi + \frac{\hbar^2[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}{2}\frac{[\partial_\mu + \frac{\mathbf{i}q}{\hbar}A_\mu, \partial_\nu + \frac{\mathbf{i}q}{\hbar}A_\nu]}{2}\Psi + m_0^2c^2\Psi \\
&= \left(\hbar^2\Box + m_0^2c^2 + \mathbf{i}q\hbar\,\partial_\mu A^\mu + 2q\mathbf{i}\hbar cA^\mu\partial_\mu - q^2A_\mu A^\mu\right)\Psi - 2q\hbar\Sigma^{\mu\nu}[\partial_\mu, A_\nu]\Psi
\end{aligned}$$

Si identificamos el primer término en la última igualdad con la condición de Klein-Gordon en presencia de un campo electromagnético, vemos que en el caso de Dirac esta se ve corregida por el segundo término proporcional a $[\partial_\mu, A_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$, que es el tensor electromagnético, acoplado con el generador de las transformaciones de Lorentz $\hbar\Sigma^{\mu\nu}$, de manera que el segundo término es de la forma

$$-2q\hbar\Sigma^{\mu\nu}[\partial_\mu, A_\nu]\Psi = 4q(\vec{B}\cdot\vec{S} + \frac{\hbar}{c}\vec{E}\cdot\vec{\alpha})\Psi$$

donde usamos que $\hbar\Sigma^{jk} = -\varepsilon^{0ijk}\vec{S}_i$, $\vec{B}^i = \varepsilon^{0ijk}F_{ij}$, $\Sigma^{0i} = \alpha^i$ y $F_{0i} = -E_i/c$. El primer término tiene claramente la forma de un acoplamiento Zeeman, mientras que el segundo, corresponde al "acoplamiento espín-órbita". Para ver esto (y para resolver las ecuaciones) conviene trabajar en la representación de Weil, de manera que tanto $\vec{S}$ como $\vec{\alpha}$ resultan ser diagonales por bloques. Si llamamos $\Psi_\pm$ las componentes del espinor en la representación de Weil $\Psi_{Weil} = \binom{\Psi_+}{\Psi_-}$, encontramos que

$$\left(\hbar^2\Box + m_0^2c^2 + \mathbf{i}q\hbar\,\partial_\mu A^\mu + 2q\mathbf{i}\hbar c A^\mu\partial_\mu - q^2A_\mu A^\mu - 4q(\vec{B} \mp \frac{\vec{E}}{c})\frac{\hbar\vec{\sigma}}{2}\right)\cdot\Psi_\pm = 0$$

Como el primer término no actúa sobre las componentes de espín, y segundo término es una combinación de las matrices $\Sigma^{\mu\nu}$, que en la representación de Weil son diagonales por bloques, podemos reescribir estas ecuaciones en esa representación como

$$\left(\hbar^2\Box + m_0^2c^2 + \mathbf{i}q\hbar\,\partial_\mu A^\mu + 2q\mathbf{i}\hbar c A^\mu\partial_\mu - q^2A_\mu A^\mu\right)\Psi_\pm - 2q\hbar\Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi_\pm = 0$$

con $\Psi = (\Psi_+, \Psi_-)^t$

donde $\Psi = (\Psi_+, \Psi_-)^t$ es una solución en la representación de Weil.

En el límite no relativista, esta ecuación se reduce a

$$\left(\frac{(\mathbf{i}\hbar\nabla - q\vec{A})^2}{2m_0} + e\Phi + \frac{2q}{m_0}\vec{B}\cdot\vec{S} + 2(\frac{q\hbar}{mc}\vec{\alpha})\cdot\vec{E}\right)\Psi \approx \mathcal{O}(\frac{\hbar^2}{2mc})$$

donde usamos que $\hbar\Sigma^{jk} = -\varepsilon^{0ijk}\vec{S}_i$, $\vec{B}^i = \varepsilon^{0ijk}F_{ij}$, $\Sigma^{0i} = \alpha^i$ y $F_{0i} = -E_i/c$. Los primeros dos términos corresponden a una partícula no relativista, con carga q movieéndose en un campo electromagnético. El tercer término se corresponde con la energía Zeeman asociada al espín de la partícula, mientras que el término en el campo eléctrico está relacionado con el llamado "acoplamiento espín-órbita".

B + 1/c E

6. Solución de la Ec. de Dirac en presencia de un Campo Electromagnético externo

6.0.1. Soluciones libres con simetría esférica

Forma general:

$$\mathbf{i}\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \gamma^0 e\phi\Psi - m_0c^2\Psi = 0$$

(asumimos el gauge de Coulomb $\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} = 0$) , en la forma de Schr.ºndinger

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\mathbf{i}\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla\Psi - e\phi\Psi - \gamma^0 m_0 c^2\Psi$$

y si buscamos soluciones estacionarias, $\Psi(r,t) = \Psi(r)e^{-\mathbf{i}Et/\hbar}$

$$E\Psi = (-\mathbf{i}\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla - \gamma^0 m_0 c^2 - e\phi)\Psi$$

Conviene ahora elegir una representacin de las matrices γ^μ que ayude a desacoplar las componentes del bi espinor Ψ. Eligiendo la representacin de "Weil"

$$\gamma^0 = \mathbf{i}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & -\mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma^i = \frac{\mathbf{i}}{c}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \sigma_{\mathbf{i}} \\ \sigma_{\mathbf{i}} & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}$$

con σ_i las matrices de Pauli, vemos que efectivamente $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}_4$ y que

$$\alpha_i = \gamma^0\gamma^i = \frac{\mathbf{i}}{c}\begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{i}} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & -\sigma_{\mathbf{i}} \end{pmatrix}.$$

Descomponiendo el biespinor Ψ en $\Psi = (\psi_{\text{left}},\psi_{\text{right}})^t$ con ψ_{left} y ψ_{right}, la ec. de Dirac se escribe como

$$\psi_{\text{right}} = \frac{(-\mathbf{i}\hbar c\vec{\sigma}\cdot\nabla - E - e\phi)\psi_{\text{left}}}{\mathbf{i}m_0c^2} \quad \text{y} \quad \psi_{\text{left}} = \frac{(-\mathbf{i}\hbar c\vec{\sigma}\cdot\nabla + E + e\phi)\psi_{\text{right}}}{\mathbf{i}m_0c^2}$$

Remplazando la primera en la segunda obtenemos

$$-m_0^2c^4\psi_{\text{left}} = (-\mathbf{i}\hbar c\vec{\sigma}\cdot\nabla - E - e\phi)(-\mathbf{i}\hbar c\vec{\sigma}\cdot\nabla + E + e\phi))\psi_{\text{left}}$$

, desarrollando,

$$(E^2 - m_0^2c^4)\psi_{\text{left}} = (-\hbar^2c^2\nabla^2 - 2eE\phi - e^2\phi^2 - \mathbf{i}ec\hbar\vec{\sigma}\cdot(\nabla\phi))\psi_{\text{left}}$$

Notamos aquí que la ecuacion obtenida es exactamente la ecuacin de Klein-Gordon para una partcula en el mismo potencial, con excepcin del ltimo trmino, que podemos interpretar como un acoplamiento "spin-rbita".

Dividiendo ahora por $2m_0c^2$ llegamos a la ecuacin

$$\frac{E^2 - m_0^2c^4}{2m_0c^2}\psi_{\text{left}} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 - \frac{E}{m_0c^2}e\phi - \frac{e^2\phi^2}{2m_0c^2} - \mathbf{i}\frac{ec\hbar}{2m_0c^2}\vec{\sigma}\cdot(\nabla\phi)\right)\psi_{\text{left}}$$

En este punto notamos que la ecuacin diferencial obtenida es formalmente análoga a la Ec. de Schrödinger con un potencial efectivo dependiente del esp'{ı}n, para una energ'{ı}a "no relativista" $E_{nr} = \frac{E^2 - m_0^2c^4}{2m_0c^2}$. Sin embargo, el "Hamiltoniano" correspondiente a este problema depende del "autovalor" va E, y posee adems un trmino anti-hermtico, por lo que no podemos resolverla en general en trminos de un problema de autovalores de un operador hermtico.

De esta manera, resolver esta ecuacin supondr en general fijar un valor de la energa, determinar si el problema de autovalores correspondientes incluye a esa energa dentro del espectro, y en tal caso, usar las soluciones que encontremos para construir el bi-espinor que ser solucin de la ecuacin de Dirac para esa energa.

6.0.2. El pozo de potencial.

6.0.3. Potencial de Coulomb. Átomo Hidrogenoide

Otro caso en que la ecuacin de Dirac resulta soluble es el del potencial $\phi \propto 1/r$, que corresponde al átomo Hidrogenoide relativista. En este caso, a pesar de que la ecuación diferencial obtenida no tiene exactamente la forma de un problema de Sturm-liuville, es posible, es posible llevarla a esa forma mediante un escaleo adecuado de la coordenada radial, con lo que se obtiene un problema completamente análogo al del átomo hidrogenoide no relativista.

Para verlo, comenzamos notando que, si

$$\phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Z\alpha c\hbar/e}{r} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c\hbar}$$

donde α es la "constante de estructura fina", implica que

$$\nabla\phi(r) = -\hat{\mathbf{r}}\frac{Z\alpha c\hbar/e}{r^2} \text{ y } \phi(r)^2 = \frac{Z^2\alpha^2c^2\hbar^2/e^2}{r^2}$$

con lo que

$$\frac{E^2 - m_0^2c^4}{2m_0c^2}\psi_{\text{left}} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 - \frac{E}{m_0}\frac{Z\alpha/c\hbar}{r} - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{Z^2\alpha^2}{r^2} - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{Z\alpha\mathbf{i}\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)\psi_{\text{left}}\,.$$

O, escribiendo el Laplaciano en coordenadas esfricas y colectando todos los trminos en $1/r^2$,

$$\frac{E^2 - m_0^2c^4}{2m_0c^2}\psi_{\text{left}} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r^2}r + \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\mathbf{L}^2/\hbar^2 - Z^2\alpha^2 - Z\alpha\mathbf{i}\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{E}{m_0c^2}\frac{Z\alpha c\hbar}{r}\right)\psi_{\text{left}}$$

Por medio del cambio de coordenadas $r \to \tilde{r} = \frac{|E|}{m_0c^2}r$, llegamos a

$$\tilde{E}\psi_{\text{left}} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}^2}\tilde{r} + \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\mathbf{L}^2/\hbar^2 - Z^2\alpha^2 - Z\alpha\mathbf{i}\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{\tilde{r}^2} - \frac{E}{|E|}\frac{Z\alpha\hbar c}{r}\right)\psi_{\text{left}}$$

donde $\tilde{E} = m_0c^2\frac{E^2-m_0^2c^4}{2|E|^2}$. La ecuacin resultante ahora s puede interpretarse en trminos de una ecuacin de autovalores, que es anloga a la Ec. de Schödinger del tomo hidrogenoide no relativista, pero en la que se remplaz el operador herm'itico $\mathbf{L}^2$ por el no hermtico

$$\tilde{\mathbf{L}}^2 = \mathbf{L}^2 - \hbar^2Z^2\alpha^2 - \mathbf{i}Z\alpha\hbar^2\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{r}}$$

Proponiendo una solucin por separacin de variables de la forma

$$\psi = \frac{R(r)}{r}\Phi(\hat{r})$$

la ecuacin se desacopla en

$$\tilde{E}R(r) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial^2}{\partial^2\tilde{r}}\tilde{r} + \frac{\hbar^2\tilde{l}(\tilde{l}+1)}{2m_0\tilde{r}^2} - \frac{E}{|E|}\frac{Z\alpha\hbar c}{r}\right)R(r)$$

y

$$\tilde{l}(\tilde{l}+1)\Phi(\hat{r}) = \left(\mathbf{L}^2/\hbar^2 - Z^2\alpha^2 - \mathbf{i}Z\alpha\sigma\cdot\hat{r}\right)\Phi(\hat{r})$$

La primera de la ecuaciones es la ecuacin radial no relativista para el potencial $1/r$, con la salvedad de que la constante de acoplamiento an depende del signo de la energa, y que l, que en la ecuacin no relativista es un enterno no negativo, es remplazado por $\tilde{l}$, un nmero real (ya que $\tilde{l}(\tilde{l}+1)$ es el autovalor de un operador no hermtico). Conviene entonces separar el problema en tres sectores, $E > 0$, $-m_0c^2 < E < m_0c^2$ y $E < -m_0c^2$.

Para el primer sector, encontramos un sector continuo del espectro, cuyas soluciones corresponden a estados no ligados de una partcula en un potencial coulombiano atractivo, esto es, funciones de Coulomb, pero con ndice $\tilde{l}$.

En el segundo sector, las soluciones son de la forma

$$\tilde{E}_{n,\tilde{l}} = \frac{-Z^2\alpha^2 m_0c^2}{2(n-\tilde{l})^2}$$

con n entero positivo, satisfaciendo $\frac{Z^2\alpha^2}{4} < (n-\tilde{l})^2$. Como $\tilde{l}$ ahora no es necesariamente entero, las soluciones con diferentes $\tilde{l}$ ahora no son degeneradas.

Finalmente, el sector con $E < 0$ slo tendr soluciones libres, ya que en tal caso, $\tilde{E} > 0$. En este caso, las soluciones sern funciones de Coulomb, pero para un potencial repulsivo.

Despejando obtenemos entonces, para el sector discreto del espectro,

$$E_{n,\tilde{l}} = m_0c^2\left(1+\left(\frac{Z\alpha}{n-\tilde{l}}\right)^2\right)^{-1/2}$$

Para determinar los valores de $\tilde{l}$, notamos que $\tilde{\mathbf{L}}^2$ conmuta con $\mathbf{J}^2$ y $\mathbf{J}_z$, de manera que sus autofunciones sern combinaciones de los esfricos armnicos espinoriales

$$\mathcal{Y}^{m_j}_{j,l}(\hat{r}) = \begin{pmatrix} \langle l, m-1/2; 1/2, 1/2|j, m_j\rangle|Y_l^{m-1/2}(\hat{r}) \\ \langle l, m+1/2; 1/2, -1/2|j, m_j\rangle|Y_l^{m+1/2}(\hat{r}) \end{pmatrix}$$

con $l = j \pm \frac{1}{2}$.

De esta manera, para encontrar el espectro de $\tilde{\mathbf{L}}^2$, basta encontrar sus autovalores en cada sector de j, m_j definidos. Como en esta base $\mathbf{L}^2$ es diagonal, necesitamos solamente encontrar los elementos de matriz del operador $\sigma\cdot\hat{r}$. Para eso, notamos que $\sigma\cdot\hat{r}$ es un operador impar frente a paridad, y que las funciones $\mathcal{Y}^{m_j}_{j,l}(\hat{r})$ poseen paridad definida, de manera que los elementos diagonales del operador en esta base deben anularse. Para determinar el elemento fuera de la diagonal, notamos que $(\sigma\cdot\hat{r})^2 = \hat{r}\cdot\hat{r} = 1$, de manera que sus autovalores son 1 y -1, lo que implica que los elementos fuera de la diagonal son números complejos de módulo 1. Puede verse adems que con la eleccin estandard de los coeficientes de Clebsh-Gordan que usamos en la definicin de $\mathcal{Y}_{j,l}^{m_j}(\hat{r})$, los elementos de matriz deben ser positivos. De esta manera, llegamos a que

$$\langle j, m_z, l = j + \frac{1}{2}|\sigma \cdot \hat{r}|j, m_z, l = j - \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto,

$$\tilde{\mathbf{L}}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} (j+1/2)(j+3/2) - Z^2\alpha^2 & \mathbf{i}Z\alpha \\ \mathbf{i}Z\alpha & (j-1/2)(j+1/2) - Z^2\alpha^2 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son $\tilde{l}(\tilde{l}+1)$ con

$$\tilde{l}_{\pm} = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2 Z^2} - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right) = j \pm \frac{1}{2} + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2 Z^2} - \left(j + \frac{1}{2}\right)$$

que en el caso $Z = 0$ llevan a $j \pm \frac{1}{2}$.

Remplazando en la energía,

$$E_{n,\tilde{l}} = m_0 c^2 \left(1 + \left(\frac{Z\alpha}{N - \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2 Z^2} + \left(j + \frac{1}{2}\right)}\right)^2\right)^{-1/2}$$

con $N = n - (j \pm 1/2) = N - l$ es el número cuántico asociado a las energías no relativistas.

Para recuperar las componentes de ψ_{right}, necesitamos saber la acción de $\sigma \cdot \nabla$ sobre un un espinor con $\mathbf{J}^2$ y $\mathbf{J}_z$ definidos. Para eso, notamos primero que

$$\nabla\psi = \hat{r}(\hat{r} \cdot \nabla\psi) - \hat{r} \times \hat{r} \times \nabla\psi$$

por lo que

$$-\mathbf{i}\hbar c\vec{\sigma} \cdot \nabla = -\mathbf{i}\hbar c(\sigma \cdot \hat{r})\frac{\partial}{\partial r}\psi - \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathbf{L}})}{r^2}\psi$$

Pero, usando que $\sigma \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\sigma \cdot \vec{\mathbf{v}})(\sigma \cdot \vec{\mathbf{w}}) - \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$, y que $\vec{r} \cdot \vec{\mathbf{L}} = 0$,

$$-\mathbf{i}\hbar c\vec{\sigma} \cdot \nabla\psi = c\left(-\mathbf{i}\hbar\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{L}})}{r}\right)(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})\psi$$

, en términos de los operadores momento angular total y orbital,

$$-\mathbf{i}\hbar c\vec{\sigma} \cdot \nabla = \hbar c\left(-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2}{\hbar^2 r}\right)(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})\psi$$

pero $(\sigma \cdot \hat{r})\psi_{\text{left}} = \frac{\tilde{l}(\tilde{l}+1) - \mathbf{L}^2/\hbar^2 + Z^2\alpha^2}{-\mathbf{i}Z\alpha}\psi_{\text{left}}$ con lo que finalmente,

$$\psi_{\text{right}}(\vec{r}) = \frac{\hbar c\left(-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2}{\hbar^2 r}\right)\frac{\tilde{l}(\tilde{l}+1) - \mathbf{L}^2/\hbar^2 + Z^2\alpha^2}{-\mathbf{i}Z\alpha} - E - \frac{Z\alpha}{r}}{m_0 c^2}\psi_{\text{left}}(\vec{r})$$

6.0.4. Niveles de Landau

Consideremos ahora el caso de una partícula de Dirac moviedose en presencia de un campo puramente magnético $\vec{B}(\vec{x})$. Como vimos antes, el campo magnético se introduce en la ecuación de Dirac a través del potencial vector asociado $\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x})$ de manera que el Hamiltoniano de Dirac toma la forma

$$\mathbf{H} = c\vec{\alpha} \cdot (-\mathbf{i}\hbar\nabla - e\vec{A}(x)) + \beta m_0 c^2$$

y la correspondiente ecuación de autovalores

$$\mathbf{H}\Psi = E\Psi$$

En la representación de Dirac, podemos escribir estas ecuaciones como

$$\begin{pmatrix} m_0c^2 - E & c\vec{\sigma} \cdot (-\hbar\mathbf{i}\nabla - e\vec{A}) \\ c\vec{\sigma} \cdot (-\hbar\mathbf{i}\nabla - e\vec{A}) & -(m_0c^2 + E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos permite escribir ξ en términos de φ:

$$\xi = \frac{c\vec{\sigma} \cdot (-\hbar\mathbf{i}\nabla - e\vec{A})\varphi}{m_0c^2 + E}$$

y por lo tanto

$$\left(-\Lambda + \frac{(\vec{\sigma} \cdot (-\hbar\mathbf{i}\nabla - e\vec{A}))^2}{2m_0} \right) \varphi = 0$$

Donde introducimos la cantidad $\Lambda = \frac{E^2 - (m_0c^2)^2}{2m_0c^2}$. Desarrollemos ahora $(\vec{\sigma} \cdot (-\hbar\mathbf{i}\nabla - e\vec{A}))^2$ teniendo en cuenta la identidad

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{V})(\vec{\sigma} \cdot \vec{W}) = \vec{V} \cdot \vec{W} + \mathbf{i}\vec{\sigma} \cdot (\vec{V} \times \vec{W})$$

que es válida incluso si las componentes de los vectores $\vec{V}$ y $\vec{W}$ no conmutan:

$$(\vec{\sigma} \cdot (-\hbar\mathbf{i}\nabla - e\vec{A}))^2\varphi = (-\hbar\mathbf{i}\nabla - e\vec{A})^2\varphi + e\hbar\vec{\sigma} \cdot (\nabla \times \vec{A} + \vec{A} \times \nabla)\varphi$$

El segundo término puede reescribirse notando que

$$\nabla \times (\vec{A}\varphi) = (\nabla \times \vec{A})\varphi + (\nabla\varphi) \times \vec{A} = \vec{B}\varphi - \vec{A} \times \nabla\varphi$$

de lo que se sigue que

$$\frac{(-\hbar\mathbf{i}\nabla - e\vec{A})^2 + 2e\frac{\hbar\vec{\sigma}\cdot B}{2}}{2m_0}\varphi = \Lambda\varphi$$

que formalmente es un problema de autovalores idéntico al del Hamiltoniano de una partícula no relativista en un campo externo, donde remplazamos E por Λ. La energía correspondiente a los estados se recupera despejandola de la definición de Λ:

$$E = \pm\sqrt{m_0c^2(2\Lambda + m_0c^2)} \approx m_0c^2 + \Lambda - \frac{\Lambda^2}{2m_0c^2}$$

7. Ecuación de Dirac en un potencial central