Mecánica Cuántica I

Año 2018

Prof: F. A. Schaposnik — JTP: M. Matera – Ay. Dipl: M. Nieto

Práctica 3 — La aproximación semiclásica

Problema 1. Una partícula en 1d ($-\infty < x < \infty$) está sujeta a una fuerza constante derivable del potencial

$$V(x) = \lambda x, \quad (\lambda > 0)$$

1. Es el espectro de energías continuo o discreto?
2. Resolver el problema exactamente.
3. Escribir la ecuación de onda correspondiente a la energía E, y dar una expresión WKB aproximada de la(s) solución(es) de la misma.
4. Repitir lo anterior para el caso $V(x) = \lambda|x|$, $(\lambda > 0)$

Problema 2. Hacer un cuadro completo con las fórmulas de conexión de la aproximación WKB entre pares de soluciones linealmente independientes de energía E a izquierda y derecha de un punto de retorno, en los dos casos posibles de pendiente positiva y negativa del potencial.

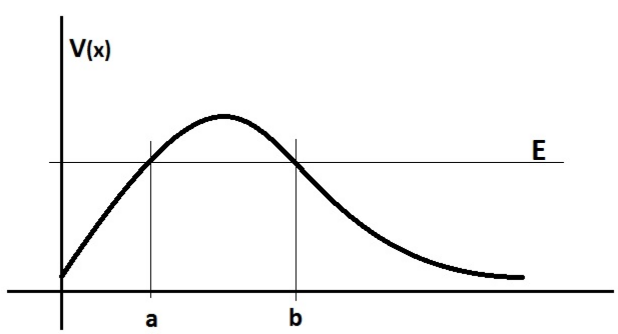
Problema 3. Determinar en la aproximación WKB los niveles de energía discretos de una partícula en los siguientes potenciales:

1. $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$;
2. $V(x) = -V_0/\cosh^2(x/c)$

Comparar con los resultados exactos.

Problema 4. Mostrar que en la aproximación WKB el coeficiente de transmisión para una partícula de masa m y energía E a través de la barrera de potencial de la figura está dado por la expresión

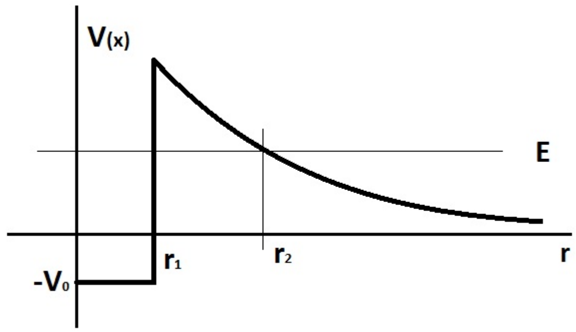
$$T = e^{-2L}\left(1 + \frac{1}{4}e^{-2L}\right)^{-2}, \qquad L = \int_a^b dx\sqrt{\frac{2m}{h^2}(V(x) - E)}$$



Problema 5. La desintegración de una partícula alfa (núcleo de He) puede modelarse por efecto tunel usando el siguiente potencial

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r < r_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Ze^2}{r} & \text{si } r > r_1 \end{cases}$$

Usando los resultados del ejercicio anterior, calcule la probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula alfa escape del núcleo



Problema 6. Mediante el método WKB, determine los estados estacionarios de una partícula sujeta al potencial $V(x) = -V_0 e^{-|x|/a}$.

Problema 7. Funciones de Bessel esféricas y WKB En tres dimensiones, es posible escribir las autofunciones correspondientes al Hamiltoniano de una partícula libre como $\psi_k(\vec{r}) = j_l(kr)Y_m^l(\hat{r})$ con $Y_m^l(\hat{r})$ un *armónico esférico* y $j_l(u)$ una *Función de Bessel esférica* que satisface

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r j_l(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} j_l(r) = k^2 j_l(r)\,.$$

1. Escriba las expresiones asintóticas para j_l en los casos $l = 0$, $l = 1$ y $l \gg 1$.

2. Obtenga las soluciones aproximadas por el método WKB para estos casos y compare.