Mecánica Cuántica I

Año 2018

Prof: F. A. Schaposnik — JTP: M. Matera – Ay. Dipl: M. Nieto

Práctica 2 — La ecuación de Schrödinger en 1 dimensión

Estados estacionarios.

Problema 1.

a) Mostrar que en problemas unidimensionales los estados ligados son no degenerados.

b) Mostrar que el resultado anterior es valido también si el movimiento está clásicamente prohibido solo en uno de los extremos de $\mathbb{R}$.

c) Usando el resultado del item (a) mostrar que las autofunciones correspondientes a estados ligados unidimensionales son reales módulo una fase independiente de x.

Problema 2. Encontrar las autofunciones y autoenergías de una partícula en el pozo de potencial infinito

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\, x \,| < \ a \\ +\infty & \text{si } |\, x \,| > \ a \end{cases}$$

Mostrar que el conjunto de soluciones es ortogonal respecto del producto escalar

$$\langle f|g\rangle = \int_{-a}^{+a} dx\, f^*(x) g(x)$$

Problema 3. Encontrar las autofunciones y la ecuación trascendente que determina las autoenergías de los estados ligados de una partícula en el pozo de potencial asimétrico dado por

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < a \\ V_2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

donde $V_2 > V_1 > 0$. Explicitarlas para el caso $V = V_1 = V_2$.

Problema 4. Encontrar las autofunciones y autoenergías del potencial

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \frac{x}{a}}.$$

Ayuda: ver el libro de Landau.

Problema 5. Oscilador I Considere un oscilador armónico unidimensional en el estado de número cuántico n,

1. Mostrar que su energía puede escribirse como

$$E_n = m\omega^2 \,\langle \mathbf{x}^2 \rangle_n$$

   Comparar con el resultado clásico.

2. Calcular las dispersiones de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$.

Problema 6. Oscilador armónico II Considere una partícula de masa m sujeta a un potencial unidimensional de la siguiente forma:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2 \ , & x > 0 \\ \infty \ , & x < 0 \end{cases}$$

1. ¿Cuál es la energía del estado fundamental?
2. ¿Cuál es el valor de expectación $\langle \hat{x}^2 \rangle$ en dicho estado?

Problema 7. Pseudo-potencial Considere una partícula de masa m en una dimensión ligada a un centro fijo por un potencial de la forma

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{ma_0}\delta(x) \ , \qquad v_0 > 0.$$

1. Encuentre la función de onda y la energía de ligadura del estado fundamental. Existen estados exitados?
2. Muestre que este resultado es consistente con tomar el límite $a \to 0$ en el caso del potencial del problema 5, con $V_0 = \frac{\hbar^2}{2ma_0 a}$.

Problema 8. Potencial doble Considere una partícula de masa M en presencia del potencial definido por $V(x) = -\frac{\hbar^2}{2Ma_0}(\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2))$. Determine su espectro y sus autofunciones.

Problema 9. Potencial Periódico a) Muestre que en un potencial periódico en una dimensión, los autoestados correspondientes a estados ligados satisfacen la condición $\psi_E(x + L) = e^{\mathrm{i}\phi}\psi_E(x)$. b) Considere el potencial "peine"

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2Ma_0}\delta(x) & |x| < L/2 \\ V(x + L) & x < -L/2 \\ V(x - L) & x > L/2 \end{cases}$$

. Determine su espectro y sus autofunciones.

Problema 10. Mostrar que para $V(\mathbf{r}) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo admite soluciones de la forma $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)$.

¿Cuál es la energía del estado Ψ? ¿Cuál es la solución general para estados estacionarios? ¿Y para no estacionarios?

Problema 11. Resolver la ecuación de Schrödinger tridimensional para un potencial de la forma

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L, \ 0 < y < L, \ 0 < z < L \\ \infty & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Estudiar la degeneración de los primeros niveles.