Práctica 10 - Espacio dual y productos tensoriales

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ la base canónica de un espacio vectorial $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\}$ otra base dada por $e'_1 = e_1$ y $e'_2 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$.

a)Hallar la matriz de cambio de base $S = [\mathbf{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$.

b)Determinar el tensor métrico $g'_{ij} = (e'_i, e'_j)$ en la nueva base y verificar que $g'_{ij} = S^k_i S^l_j g_{kl}$. Calcular además las componentes de $(g')^{ij}$.

c)Construir la base dual de $\mathcal{B}'$ en términos de los elementos de la base dual de $\mathcal{B}$.

d)Expresar el vector $v = e_1 + 2e_2$ en términos de los elementos de la base $\mathcal{B}'$ y verificar que $v = x^\mu_{\mathcal{B}} e_\mu = x^\mu_{\mathcal{B}'} e'_\mu$. Hallar las componentes covariantes de $x^{\mathcal{B}'}_\mu$ e interpretar su significado.

e)Expresar la forma lineal $\omega \in (\mathbb{V}_{\mathbb{R}})^*$ definida por $\omega(e_1) = 1$, $\omega(e_1 - e_2) = -1$ en las bases $\mathcal{B}^*$ y $(\mathcal{B}')^*$ y verificar que si $\omega = f^{\mathcal{B}}_\mu (e^*)^\mu = f^{\mathcal{B}'}_\mu (e^{'*})^\mu$, $\omega(v) = f^{\mathcal{B}}_i x^\mu_{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{B}'}_i x^\mu_{\mathcal{B}'}$

Ej. 2 — Para el espacio $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[(-1,1)]$ de los polinomios de grado 2 en el intervalo $(-1,1)$ con el producto interno definido por $(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$,

a)determinar la base dual de $\mathbb{V}^*$ asociada a la base de monomios $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

b)Calcular las componentes del tensor métrico g_{ij} en dicha base.

Ej. 3 — Sean T^i_{jk} las componentes de un tensor de tipo $(2,1)$. Dadas las siguientes expresiones, determine si son o no tensores, y su caracter tensorial. Luego escriba explícitamente sus correspondientes leyes de transformación.

a)T^2_{ijk}

b)$T_{ijk}T^{ijk}$

c)$T_{ijk}T_{lmk} - T_{imk}T_{ljk}$

d)$T_{i1k}T_{j2k}$

e)T_{iik}

f)$\exp(T_{ijk}T^{ijk})$

Dado un vector x^i, construya todos los escalares y tensores $(1,1)$ que pueden construirse contrayendo indices del tensor $L^{mi}_{jk} = x^m T^i_{jk}$. Escribir explicitamente estas contracciones en términos de los elementos de x^m y T^i_{jk} para el caso de un espacio de dimensión 2.

Ej. 4 — Muestre que la cantidad δ^j_i es un tensor mixto con un índice covariante y otro contravariante, y calcule δ^i_i. Muestre además que las componentes de δ^j_i son invariantes ante cualquier transformación de coordenadas.

Ej. 5 — El tensor de Levi Civita. Considere $\mathcal{R}$ un espacio de Riemann n-dimensional. Se define el tensor "forma de volumen n-dimensional" de ese espacio como el tensor completamente antisimétrico de tipo $(n,0)$ tal que sus componentes satisfacen $\epsilon_{i_1\ldots i_n} = \sqrt{|\det(g)|}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$, siendo $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ el "símbolo de Levi Civita" ($\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = 1$).

1.Muestre que dadas dos bases ortonormales *ordenadas* $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, $\epsilon^{\mathcal{B}'}_{i_1\ldots i_n} = \pm\epsilon^{\mathcal{B}}_{i_1\ldots i_n}$.

2.Muestre que si la anterior igualdad se cumple para el signo negativo, basta con intercambiar en la base $\mathcal{B}'$ los primeros dos elementos para construir una base $\mathcal{B}''$ que cumpla la igualdad con el signo $+$.

3.Muestre que la condición $\epsilon^{\mathcal{B}'}_{i_1\ldots i_n} = \epsilon^{\mathcal{B}}_{i_1\ldots i_n}$ define una relación de equivalencia entre las bases de $\mathcal{R}$.

4.Restringiendonos a bases dentro de una dada clase de equivalencia, $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$ transforma como un tensor, que se conoce como "forma de volumen de $\mathcal{R}$". Explique el motivo de este nombre.

5.De una forma general para las componentes del tensor completamentre contravariante $\epsilon^{i_1\cdots i_n}$.

6.Para $n=3$, usando la antisimetría, construya todas las contracciones posibles del tensor $\epsilon^{ijk}\epsilon_{rst}$.

7.Opcional: Muestre que si $\omega^{i_1,\cdots i_m}$ es un tensor completamente antisimétrico de tipo $(0,m)$, el mapeo $^*(\cdot)$ definido por $^*\omega_{j_{m+1}\cdots j_n} = \frac{1}{m!}\omega^{i_1\ldots i_m}\epsilon_{i_1\ldots i_m\, j_{m+1}\ldots j_n}$ satisface $^{**}\omega = \pm\omega$ (esto es, $(*)$ resulta ser un operador involutivo, conocido como "estrella de Hodge"). En particular, si F_{ij} es un tensor antisimétrico en $\mathbb{R}^3$, $^*F^k$ transforma como un "pseudo-vector" (cambia de signo cuando transformamos entre bases no equivalentes). Muestre que si v^i y w^j son dos vectores de $\mathbb{R}^3$ y $T^{ij} = \frac{1}{2}(v^i w^j - v^j w^i)$, se cumple que $(^*T)_i = (v \times w)^i$.

Ej. 6 — Muestre que la traza y el determinante de un tensor de tipo $(1,1)$ son cantidades invariantes.

Ej. 7 — Sea $\mathcal{R}$ un espacio de Riemann, con tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

a) Muestre que el operador ∂_i transforma adecuadamente cuando actúa sobre campos escalares pero no cuando lo hace sobre campos tensoriales generales.

b) Determine las reglas de transformación que deben satisfacer los símbolos de Christofel $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ de manera que $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ transforme como un vector covariante ante cambios generales de coordenadas.

c) Muestre que si existe un sistema de coordenadas para el que localmente $D_\mu = \partial_\mu$, $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu}$.

d) Muestre que si $D_\kappa g_{\mu\nu} = 0$, $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} + \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} = g^{\kappa\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$.

e) Generalice las expresiones para la divergencia y rotor de un campo vectorial para coordenadas generalizadas en términos de los símbolos de Christofel.

f) Calcule los símbolos de Christofel asociados a las coordenadas cilíndricas de $\mathbb{R}^3$. Encuentre las expresiones para $\nabla\phi$,$\nabla^2\phi$, $\nabla \cdot F$ y $\nabla \wedge F$.

Ej. 8 — Calcule los siguientes productos tensoriales de operadores, construya su representación matricial en la base producto tensorial y halle sus autovectores y autovalores:

$$a)\sigma_z \otimes \sigma_z \qquad b)\sigma_z \otimes \sigma_x \qquad c)\mathbf{1}_2 \otimes \sigma_x \qquad d)\sigma_x \otimes \mathbf{1}_2$$

Ej. 9 — Opcional para los alumnos de 2do: Sean F, G dos campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ y ϕ un campo escalar. Usando las propiedades del tensor de Levi Civita, demuestre las siguientes identidades válidas en coordenadas cartesianas:

a) $\nabla \cdot (\nabla \wedge G) = 0$

b) $\nabla \wedge (\phi \wedge F) = (\nabla\phi) \wedge G + \phi\nabla \wedge G$

c) $\nabla \wedge (F \wedge G) = (\nabla \cdot G)F - (\nabla \cdot F)G + G \cdot \nabla F - F \cdot \nabla G$

d) $F \wedge (\nabla \wedge G) = \frac{1}{2}\nabla(F \cdot G) + \nabla \cdot (FG) - G \cdot \nabla F$

e) $\nabla \wedge (\nabla \wedge F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$

Ej. 10 — Opcional para los alumnos de 2do: Muestre que el “rotor” de un campo vectorial covariante F_i definido por $R_{ij} = F_{i,j} - F_{j,i}$ ($F_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$) es un tensor antisimétrico de tipo $(2,0)$. Muestre que $R_{ij} = {}^*(\nabla \wedge F)_{ij}$, es el “dual de Hodge” del campo vectorial rotor. Muestre que - a diferencia de $F_{i,j}$ - en un espacio de Riemann (o pseudo-Riemann) R_{ij} transforma correctamente ante transformaciones generales de coordenadas.

Ej. 11 — Opcional: Verifica que bajo la transformación lineal de coordenadas $(x')^k = R^k_l x^l$ el operador $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ transforma en forma covariante $\partial'_i = (R^{-1})^k_i \partial_k$. Mostrar luego que la divergencia $\nabla \cdot F = \partial_i \phi^i$ de un campo vectorial $F = \phi^i e_i$ es una cantidad escalar.

Ej. 12 — Opcional: Sea $H = \sigma_x \otimes \sigma_x + q(\mathbf{1}_2 \otimes \sigma_z + \sigma_z \otimes \mathbf{1}_2)$ un operador sobre $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Construya la representación matricial de H y evalue $\rho = \exp(-tH)$. Luego calcule la “traza parcial” $\mathrm{Tr}_A\rho$ sobre el segundo subespacio.