Práctica 9 - Espacios de Hilbert

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — *Operadores adjuntos*

1. Muestre a partir de los axiomas que definen el producto escalar unitario en espacios complejos, que en dimensión finita, para cualquier operador $\mathbf{A}$, $\mathcal{B}$, $([\mathbf{A}]_{\mathcal{B}})_{ij} = ([\mathbf{A}^\dagger]_{\mathcal{B}})^*_{ji}$, respecto de cualquier base ortonormal $\mathcal{B}$.
2. Considere ahora el operador $\mathbf{A}$ definido por sus elementos de matriz $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}^{(0)}} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)$ en la base canónica ortonormal $\mathcal{B}^{(0)} = \{e_1, e_2\}$. Encuentre los elementos de matriz de $\mathbf{A}^\dagger$ en esa base y respecto a la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_2\}$.

Ej. 2 — Dado el operador $\mathbf{P} = -i\partial_x$, que actua sobre el espacio de funciones $\mathcal{F} = \{f / f \in \mathcal{C}^\infty[-1,1] \wedge f(-1) = f(1)\}$, calcule $\mathbf{P}^\dagger$ respecto al producto escalar $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. ¿Es autoadjunto?.

Ej. 3 — Determine si las siguientes formas satisfacen los axiomas de un producto escalar en un espacio complejo:

a) En $\mathbb{C}^2$, $((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) = \overline{\eta_1}\xi_1 + (1-i)\overline{\eta_1}\xi_2 + (1+i)\overline{\eta_2}\xi_1 + 3\overline{\eta_2}\xi_2$

b) En $\mathbb{C}^{n\times n}$, $(A,B) = \mathrm{tr}[A^\dagger B] = \mathrm{tr}[BA^\dagger]$. Verifique que las matrices de Pauli son ortogonales con dicho producto. ¿Son ortonormales?

Ej. 4 — Encuentre una base ortogonal y una ortonormal (con el producto interno usual en $\mathbb{C}^3$) para el subespacio S generado por $(1, i, 1)$ y $(1+i, 0, 2)$. Determine $S^\perp$ y encuentre las proyecciones de $(1,1,1)$ sobre S y $S^\perp$.

Ej. 5 — Considere el espacio vectorial $\mathbb{C}[-\pi, \pi]$ de las funciones continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$, equipado con el producto interno definido por $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$.

a) Verifique que (f,g) es un producto interno.

b) Calcule $(1 + \exp(it), e^{it})$ y verifique la desigualdad de Schwarz.

c) Muestre que las funciones $\exp(ikt)$, con k entero son ortogonales con este producto. ¿Son ortonormales?

d) Considere ahora el subespacio definido por las funciones $\mathcal{H} = \{\psi \in \mathbb{C}[-\pi,\pi], \psi \in \mathcal{C}^\infty([-\pi,\pi]) \wedge \psi(-\pi) = \psi(\pi) = 0\}$ (funciones derivables a todo orden que se anulan en los bordes). Sea $\psi \in \mathcal{H}$ una función tal que $(\psi,\psi) = 1$. Definimos (para un dado ψ) el valor medio de un operador $\mathbf{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como $\langle A \rangle_\psi = (\psi, A\psi)$. Usando la desigualdad de Schwarz, muestre que para los operadores $\mathbf{X}$ y ∂_x (definidos en la práctica 5) se satisface que $|\langle X^2 \rangle||\langle \partial_x^2 \rangle| \geq \frac{1}{2}$.

Ej. 6 — Matrices cíclicas. Considere una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A_{i,j} = f(i-j)$ con $f(i+n) = f(i)$ (cada fila es igual a la fila anterior desplazada cíclicamente una posición a la derecha). Muestre que la matriz es diagonal en la base definida en el Ej. 5 de la práctica 4, y que los autovalores vienen dados por $\lambda_k = \sum_{m=1}^{n} f(m)\exp(-ikm/n)$ (esto es, los autovalores son la "transformada de Fourier discreta" de la última fila). Muestre que la base Fourier es una base ortonormal. Luego diagonalice las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej. 7 — Determine los valores posibles de α para que la matriz $A(\alpha) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & i \\ \alpha & -1 \end{smallmatrix}\right)$ represente, en la base canónica de $\mathbb{C}^2$

a) Un operador normal

b) Un operador autoadjunto

c) En ambos casos, encontrar los correspondientes autovalores y bases ortonormales que diagonalizan $A(\alpha)$

Ej. 8 — Encuentre los autovalores y una base ortonormal de autovectores de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej. 9 — *Matrices unitarias como exponenciales de matrices hermíticas*:

a)Muestre que si H es una matriz hermítica, $U = \exp(i\,t\,H)$ es una matriz unitaria para todo valor real de t.

b)Demuestre que si $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz unitaria, existe una familia de matrices hermíticas $\{H_k\}$ que satisfacen $U = \exp(i\,t\,H_k)$. ¿Cómo se relacionan las H_k entre sí?

c)Opcional: Muestre que para $A, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con H una matriz hermítica, $\exp(i\,H)A\exp(-i\,H) = A + i\,[H, A] - \frac{1}{2}[H, [H, A]] + \ldots = \exp(i[H, \cdot])A$. (Observe que $[H, \cdot]A = H.A - A.H$ es un operador lineal sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$)

Ej. 10 — Muestre que las siguientes matrices son unitarias y encuentre sus autovalores y un conjunto de autovectores normalizados

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi/3} \end{pmatrix}$$

Ej. 11 — Descomposición polar:

a)Muestre que para cualquier matriz invertible A, la matriz $P = \sqrt{A^\dagger A}$ es no singular y que $U = A\,P^{-1}$ es una matriz unitaria.

b)Construya la descomposición polar de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$$

Ej. 12 — Opcional: Transformaciones de Householder:

1.Muestre que si u es un vector unitario $u^\dagger u = 1$, $\mathbf{Q}_u = \mathbf{1} - 2uu^\dagger$ es un operador "reflexión" respecto al hiper-plano ortogonal a u, y que es un operador unitario ($\mathbf{Q}_u^\dagger \mathbf{Q}_u = \mathbf{1}$). Estas transformaciones son conocidas como "reflexiones de Householder".

2.Dado un vector v no necesariamente normalizado, encuentre un vector unitario u / $\mathbf{Q}_u\,v = \frac{e_1^\dagger v}{|e_1^\dagger v|}|v|e_1$, el primer elemento de la base canónica. (Tip: asumir primero que $|v| = 1$ y luego generalizar)

3.Utilize el resultado anterior para encontrar una secuencia finita de operadores $\mathbf{Q}_{u_i}$ que lleven una matriz arbitraria $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a la llamada "forma de Hessenberg": $\mathbf{A}' = \mathbf{Q}_{u_n}\ldots\mathbf{Q}_{u_1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_{u_1}^\dagger\ldots\mathbf{Q}_{u_n}^\dagger$ tal que $\mathbf{A}'_{ij} = 0\forall i > j+1$.

4.Muestre además que si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$, $\mathbf{A}'$ resulta ser una matriz tridiagonal simétrica.

Ej. 13 — Opcional: *Espacios de Krilov.* Sea $v \in \mathbb{C}^n$ y $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermítica. Considere las bases $B'_k = \{w_1, \ldots w_k\}$, con $w_m = \mathbf{H}^{m-1}v$ y subespacios $\mathbb{K}_k = \text{span}(B'_k)$.

a)Observe que que la sucesión de subespacios $\mathbb{K}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{K}_k \subset \ldots \subset \mathbb{K}_n \subset \mathbb{C}^n$ definidos por las bases, o bien convergen a un subespacio invariante de $\mathbf{H}$ para algún $k < n$ o bien $\mathbb{K}_n = \mathbb{C}^n$.

b)Muestre que mediante ortonormalización de Gram-Schmidt existe una matriz de cambio de base L_{lm} que vincula cada base B'_k con una base ortonormal $B_k = v_0, \ldots, v_k$ de manera que $B_k \subset B_{k+1}$. Muestre que tal matriz de cambio de base tiene que ser triangular superior y que además, dada la sucesión $B_1 \subset ... \subset B'_k$, la sucesión de bases B_k queda determinada a menos de una fase compleja en cada vector.

c)Partiendo de la observación de que $w_i^\dagger \mathbf{H} w_j = W_{i,j+1}$, muestre que $\tilde{\mathbf{H}}^{(k)}_{ij} = v_i^\dagger \mathbf{H} v_j$ tiene que ser una matriz simétrica tridiagonal. Observe que si relajamos la condición de hermiticidad de $\mathbf{H}$ los elementos de matriz $\tilde{\mathbf{H}}^{(k)}_{ij} = 0$ para $i > j+1$. Este tipo de matrices se conocen como "matrices de Hessemberg".

Ej. 14 — Opcional: *Polinomios ortogonales y espacios de Krilov.*

1.Muestre que $\mathbb{P}_n[\mathbb{R}]$, los subespacios de polinomios hasta grado n forman una sucesión de espacios de Krilov respecto al operador $\mathbf{X} : \mathbb{P}[\mathbb{R}] \to \mathbb{P}[\mathbb{R}]$ definido por $(\mathbf{X}p)(x) = xp(x)$.

2.Muestre que el operador $\mathbf{X}$ es un operador simétrico respecto de cualquier producto escalar sobre $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$ de la forma $(p, q) = \int_a^b p(x)q(x)\rho(t)dt$ con $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}_+$.

3.Usando el resultado del problema 13 y de los incisos anteriores, muestre que cualquier conjunto de polinomios ortogonales presenta una relación de recurrencia de la forma $p_{n+1}(x) = x\,a_n p_n(x) + b_n p_{n-1}$.