Práctica 8 - Espacios Euclideos

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Muestre que las siguientes formas bilineales satisfacen los axiomas de un producto escalar euclídeo:

a)$((\eta_1,\eta_2),(\xi_1,\xi_2)) = \eta_1\xi_1 - \eta_2\xi_1 - \eta_1\xi_2 + 4\eta_2\xi_2$ en $\mathbb{R}^2$

b)$(K,H) = \mathrm{tr}(K^{\mathrm{t}}H)$ en $\mathbb{R}^{n\times m}$

c)Usando el producto escalar definido en el inciso anterior, y dadas $A = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ y $C = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, encuentre (A,B), $(2\,A+3\,B,C)$, la distancia entre A y B, $||A||$, $||B||$ y $||C||$ y los "ángulos" que forman entre sí. Calcule las matrices normalizadas.

Ej. 2 — Determine la estabilidad de la forma cuadrática $\omega:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $\omega(x) = x^t.A.x$ con $A = \begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$. Encuentre las direcciones de máxima y mínima variación.

Ej. 3 — Dada la ecuación de autovalores generalizados $A\,x_\lambda = \lambda\,B\,x_\lambda$ con

$$A = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

a)Encuentre los correspondientes autovectores y autovalores generalizados

b)Muestre que los autovectores generalizados son ortogonales respecto al producto escalar definido por $(x,y)_B = x^t\,B\,y$

Ej. 4 — Calcule el coseno del ángulo que forman :

a)$u = (1,-3,2)$ y $v = (2,1,5)$ en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual.

b)$f(t) = 2\,t-1$ y $g(t) = t^2$ en $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$, con el producto escalar $\int_0^1 f(t)g(t)dt$

c)$f(t) = t-1$ y $g(t) = t^2$ en $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$, con el producto escalar $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\exp(-t^2)dt$

d)Determine el ángulo entre los vectores $v_1 = (1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$ y $v_2 = (-1,1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$ en función de n.

Ej. 5 — Sea $\mathcal{S} = \mathrm{span}(\{(1,0,1,1,1),(2,3,1,1,1),(4,5,7,1,1),(7,8,10,11,1)\})$ un subespacio de $\mathbb{R}^5$. Usando el método de Gramm-Schmidt, encuentre una base ortonormal que genere el mismo subespacio.

Ej. 6 — Sean $v_1 = (1,0,2,0,0)$, $v_2 = (1,1,-1,1,1)$ y $v_3 = (0,0,0,0,1)$ tres vectores en $\mathbb{R}^5$. Construya la matriz de Gramm asociada a estos vectores. Luego calcule el hipervolumen del paralelepípedo generado por esos vectores y encuentre una base ortogonal de $\mathrm{span}\{v_1,v_2,v_3\}$.

Ej. 7 — *Descomposicion QR*: Partiendo de la existencia del método de Gramm Schmidt, muestre que toda matriz real $M\in\mathbb{R}^{m\times n}$ puede escribirse como $M = Q\,R$ con $Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$ una matriz ortogonal y R una matriz triangular superior. Esta descomposición es conocida como "descomposición QR". Encuentre la descomposición QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Ej. 8 — Sean $v_1 = (1,2,3,4,5)$, $v_2 = (1,-2,3,-2,-1)$ dos vectores en $\mathbb{R}^5$. Dado el subespacio $S = \mathrm{span}\{v_1,v_2\}\subset\mathbb{R}^5$, encuentre los operadores de proyección ortogonal sobre S y sobre su complemento ortogonal $S^\perp$. Encuentre la distancia mínima entre S y el vector $v_3 = (1,0,0,0,0)$.

Ej. 9 — Demuestre que en dimensión finita, la matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales es una matriz ortogonal ($[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = ([\mathbf{1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{\mathrm{t}}$)

Ej. 10 — *Número de condición.*

a)Calcule el número de condición de la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 120 & 60 & 40 \\ 60 & 40 & 30 \\ 40 & 30 & 24 \end{pmatrix}.$$

b)Encuentre el vector x_0 que satisface la ecuación $H.x_0 = b_0$ con $b_0 = (0, 1, 0)^t$.

c)Sea ahora un vector genérico $b = b_0 + \Delta b$ y $x(b)$ la solución de la ecuación matricial $H.x(b) = b$. De una cota para $|x - x_0|/|\Delta b|$ en términos del número de condición de H.

Ej. 11 — Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a)Evalue $\max_{x \in \mathbb{R}^5} |A\,x|/|x|$.

b)Encuentre la descomposición en valores singulares de A.

c)Construya la correspondiente matriz de pseudoinversa de Moore - Penrose.

d)Dado el vector $b = (0, 1, 1)^t$ encuentre el vector $x \in \mathbb{R}^5$ que minimize $||A.x - b||$.

e)Dado el vector $b = (0, 1, -1)^t$ encuentre el vector $x \in \mathbb{R}^5$ de norma mínima que satisfaga $A.x = b$

f)Calcule $\tilde{\mathbf{A}} = \sigma v \cdot w^{\mathrm{t}}$ tal que $||(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}})||$ tome su menor valor posible. Note que la matriz original requería para ser representada 11 entradas no nulas, mientras que $\tilde{\mathbf{A}}$ requiere sólo seis.

Ej. 12 — Demuestre que $\{1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\cos(nx), \sin(nx)\}$ es un conjunto de funciones mutuamente ortogonales respecto del producto $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Ej. 13 — *Polinomios ortogonales*:

a)Sea $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ con el producto escalar $(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)p(t)\exp(-t^2)dt$. Aplique el método de Gram-Schmidt a la base $1, t, t^2, t^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$. Note que los elementos de esta base son viejos conicidos...

b)Repita el procedimiento, pero ahora con el producto definido por $(p, q) = \int_{-1}^{1} q(t)p(t)dt$. Los polinomios que forman esta base se conocen como "Polinomios de Legendre".

c)Repita una vez más el procedimiento, pero ahora con el producto definido por $(p, q) = \int_{-1}^{1} q(t)p(t)(1 - t^2)^{-1/2}dt$. Los polinomios que forman esta base se conocen como "Polinomios de Chebyshev". Note que satisfacen la relación $T_n(\cos(x)) = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} \cos(n\,x)$ para $n > 0$