Práctica 7 - Formas cuadráticas / Espacios Euclideos- pseudo euclideos -unitarios

Departamento de Física - UNLP

1. Formas bilineales y formas cuadráticas

Ej. 1 — Considere las siguientes funciones definidas para los vectores $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$:

a)$A(x, y) = 1$.

b)$A(x, y) = (\eta_1 - \xi_1)^2 + \eta_2\xi_2$

c)$A(x, y) = (\eta_1 + \xi_1)^2 - (\eta_2 - \xi_1)^2\xi_2$

d)$A(x, y) = (\eta_1\xi_1) - \eta_2\xi_2$

Determine cuáles de estas funciones corresponden a formas bilineales de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para aquellas que lo sean, determine la matriz que representa la forma cuadrática en la base canónica del espacio. Indique además si dichas formas bilineales son simétricas.

Ej. 2 — Verificar si las siguientes aplicaciones $A : \mathbb{R}_n[\mathbb{R}] \times \mathbb{R}_n[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ son formas bilineales:

a)$A(p, q) = p(1) + q(1)$

b)$A(p, q) = p(1)q(1)$

c)$A(p, q) = p(1)q'(1)$

d)$A(p, q) = \int_a^b dt \int_a^b ds p(t)K(s, t)q(s)$ con $K(s, t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en $D := \{(x, y) : a < x, y < b\}$

e)$A(p, q) = \int_0^1 dt p(t) \int_0^1 ds q(s)$

Ej. 3 — Sea la forma bilineal $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $A((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) = 2\eta_1\xi_1 - 3\eta_1\xi_2 + \eta_2\xi_2$.

a)Encuentre su matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

b)Encuentre su matriz asociada en la base $\mathcal{B}' = \{(2, 1), (1, -1)\}$

c)Encuentre la matriz de cambio de base $P = [\,\mathbf{1}\,]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ y verifique que $\mathbf{A}_{\mathcal{B}'} = P^{\mathrm{t}}\mathbf{A}_{\mathcal{B}}P$

d)Rescriba la forma bilineal como una suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica. Encuentre las matrices asociadas con cada una de esas partes en la base $\mathcal{B}$.

Ej. 4 — En $\mathbb{R}^{2\times 2}$ se define $f(A, B) = \mathrm{tr}(A.M.B)$, donde $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Muestre que f es una forma bilineal y construya su matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ej. 5 — Muestre que $f(A, B) = n\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ define una forma bilineal en $\mathbb{C}^{n\times n}$. ¿Es simétrica? ¿Es singular? (Sugerencia: aplíquela a la matriz identidad y a otra matriz arbitraria).Muestre que, en cambio, su restricción al subespacio de matrices de traza nula es no singular .

Ej. 6 — Considere los conjuntos $\mathcal{C}_{A,b,c} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/ x^t \cdot A \cdot x + b^t \cdot x = c\}$ donde $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^2$ y $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Determine una parametrización de los puntos contenidos en $\mathcal{C}_{A,c}$ para los siguientes $\mathcal{C}_{A,c}$:

1.$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, b = (1, 1)^t, c = 2$

2.$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, b = (1, -1)^t, c = 1$

3.$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = (1, -1), c = 1$

4.$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = (1, 1), c = 1$

Tip: Lleve la forma cuadrática $x^t \cdot A \cdot x + b^t \cdot x$ a su forma canónica.

2. Espacios Euclideos

Ej. 7 — Muestre que las siguientes formas bilineales satisfacen los axiomas de un producto escalar euclídeo:

a)$((\eta_1, \eta_2), (\xi_1, \xi_2)) = \eta_1\xi_1 - \eta_2\xi_1 - \eta_1\xi_2 + 4\eta_2\xi_2$ en $\mathbb{R}^2$

b)$(K, H) = \mathrm{tr}(K^{\mathrm{t}}H)$ en $\mathbb{R}^{n\times m}$

c)Usando el producto escalar definido en el inciso anterior, y dadas $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ y $C = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, encuentre (A, B), $(2\,A + 3\,B, C)$, la distancia entre A y B, $||A||$, $||B||$ y $||C||$ y los "ángulos" que forman entre sí. Calcule las matrices normalizadas.

Ej. 8 — Calcule el coseno del ángulo que forman :

a)$u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, 1, 5)$ en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual.

b)$f(t) = 2\,t - 1$ y $g(t) = t^2$ en $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$, con el producto escalar $\int_0^1 f(t)g(t)dt$

c)$f(t) = t - 1$ y $g(t) = t^2$ en $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$, con el producto escalar $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\exp(-t^2)dt$

d)Determine el ángulo entre los vectores $v_1 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ y $v_2 = (-1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ en función de n.

Ej. 9 — Sea $\mathcal{S} = \mathrm{span}(\{(1, 0, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1, 1), (4, 5, 7, 1, 1), (7, 8, 10, 11, 1)\})$ un subespacio de $\mathbb{R}^5$. Usando el método de Gramm-Schmidt, encuentre una base ortonormal que genere el mismo subespacio.

Ej. 10 — Sean $v_1 = (1, 0, 2, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, -1, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$ tres vectores en $\mathbb{R}^5$. Construya la matriz de Gramm asociada a estos vectores. Luego calcule el hipervolumen del paralelepípedo generado por esos vectores y encuentre una base ortogonal de $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Ej. 11 — *Descomposicion QR*: Partiendo de la existencia del método de Gramm Schmidt, muestre que toda matriz real $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ puede escribirse como $M = Q\,R$ con $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ una matriz ortogonal y R una matriz triangular superior. Esta descomposición es conocida como "descomposición QR". Encuentre la descomposición QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ej. 12 — Sean $v = (1, 2, 3, 4, 5)$ un vector en $\mathbb{R}^5$. Dado el subespacio $S = \mathrm{span}\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^5$, encuentre los operadores de proyección ortogonal sobre S y sobre su complemento ortogonal $S^\perp$.

Ej. 13 — Demuestre que en dimensión finita, la matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales es una matriz ortogonal $([\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = ([\mathbf{1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{\mathrm{t}})$

Ej. 14 — Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a)Encuentre su descomposición en valores singulares.

b)Calcule $\tilde{\mathbf{A}} = \sigma v \cdot w^{\mathrm{t}}$ tal que $||(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}})||$ tome su menor valor posible.

Ej. 15 — Demuestre que las funciones el conjunto $\{1\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\cos(nx), \sin(nx)\}$ son un conjunto de funciones ortogonales respecto del producto $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Ej. 16 — *Polinomios ortogonales*:

a)Sea $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ con el producto escalar $(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)p(t)\exp(-t^2)dt$. Aplique el método de Gram-Schmidt a la base $1, t, t^2, t^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$. Note que los elementos de esta base son viejos conicidos...

b)Repita el procedimiento, pero ahora con el producto definido por $(p, q) = \int_{-1}^{1} q(t)p(t)dt$. Los polinomios que forman esta base se conocen como "Polinomios de Legendre".

c)Repita una vez más el procedimiento, pero ahora con el producto definido por $(p, q) = \int_{-1}^{1} q(t)p(t)(1 - t^2)^{-1/2}dt$. Los polinomios que forman esta base se conocen como "Polinomios de Chebyshev". Note que satisfacen la relación $T_n(\cos(x)) = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}}\cos(n\,x)$ para $n > 0$