Práctica 4 - Transformaciones, operadores lineales y problema de autovalores

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n\times n}$ ¿cuáles de los siguientes operadores son lineales?

a)$\hat{G}(A) = MA$

b)$\hat{G}(A) = [M, A] = M.A - A.M$ con $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$

c)$\hat{G}(A) = M + A$

siendo $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Ej. 2 — Considere los siguientes operadores sobre el espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha,0,0) \qquad \mathbf{G}(\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,\gamma) \qquad \mathbf{H}(\alpha,\beta,\gamma) = (\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}, 0) \tag{1}$$

a)Verifique que son operadores lineales y describir su efecto geométrico de los mismos.

b)Muestre que $\mathbf{FG} = \mathbf{0}$, el operador nulo.

c)Demuestre que cada uno de estos operadores es idempotente ($\mathbf{P}$ es idempotente $\Leftrightarrow \mathbf{P^2} = \mathbf{P}$).

d)Construya las correspondientes matrices de representación en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y verificar los resultados en c)

e)Determine el núcleo y la imagen de estos operadores, así como sus dimensiones.

Ej. 3 — Operadores de proyección: Sea $\mathbf{P} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un operador idempotente ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$) sobre $\mathbb{V}$. Demuestre que:

a)Si $u \in I(\mathbf{P}) \to \mathbf{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$

b)Si $\mathbf{P} \neq \mathbf{1} \to \mathbf{P}$ no es sobreyectiva.

c)$\mathbf{1} - \mathbf{P}$ también es un operador de proyección.

d)El espacio vectorial sobre el que actúa $\mathbf{P}$ puede escribirse como $I(\mathbf{P}) \oplus \mathbf{N}(\mathbf{P})$

e)Para cada descomposición de $\mathbb{V}$ como suma directa $\mathbb{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ existe un operador proyección $\mathbf{P}_{\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2}$ de manera que si $x = m + n \in \mathbb{V}$ con m $(n) \in \mathcal{V}_1$ $(\mathcal{V}_2)$, $\mathbf{P}_{\mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2}(x) = m$.

f)Muestre que $\frac{1+\sum_\mu v_\mu \sigma_\mu}{2}$ - siendo σ_μ las matrices de Pauli y v_μ las componentes de un vector unitario de $\mathbb{R}^3$ - son operadodes de proyección.

Ej. 4 — Calcule la matriz $\exp(A)$ siendo $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ tal que $\forall_{ij} A_{ij} = 1$ (una matriz de 6×6 con todas sus entradas iguales a 1)

Ej. 5 — Rotaciones planas:

a)Calcule los autovalores de $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, y muestre que $R_\theta = \exp(-i\,\theta\sigma_y)$ ($\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$)

b)(Opcional para los alumnos de segundo año) A partir del resultado anterior, muestre que las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q(t) = p(t) \\ \frac{d}{dt}p(t) = -q(t) \end{cases}$$

describen trayectorias circulares en el plano (x, p)

Ej. 6 — Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a)Determine los autovectores y autovalores de A, B, C y D.

b)Evalue los autovalores y autovectores de $\alpha A + \beta I$

c)Evalue los autovalores de A^2 y A^8.

d)Evalue los autovalores de $\exp(A)$, $\exp(B)$ y $\exp(D)$

Ej. 7 — Ecuaciones de recurrencia: Si $x_1 = 1$ ($x_0 = 0$), encuentre el término general para la ecuación de recurrencia $x_{n+1} = 2\,x_n - x_{n-1}/2$ y para $x_{n+1} = x_n/2 - x_{n-1}/2$.

Ej. 8 — Exprese los autovalores de una matriz general en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ en función de su traza y su determinante. ¿Qué se puede decir de sus autovectores?

Ej. 9 — Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz antisimétrica genérica. Determine sus autovalores y sus autovectores. Tip: Después de haberlo hecho siguiendo el método general (calcular el polinomio característico, encontrar los autovalores y luego encontrar los núcleos de $A - \lambda$), observe que pueden obtenerse de saber que 1) $\mathrm{Tr}A = 0$, 2) $\det A = 0$ y 3) $\mathrm{Tr}A.A = -2\left((A_{12})^2 + (A_{13})^2 + (A_{23})^2\right)$.

Ejercicios adicionales (opcionales)

Ej. 10 — Demuestre que si $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de permutación (una matriz formada por filas independientes, cada una de ellas con un único elemento no nulo igual a 1), sus autovalores (en general complejos) tienen que ser raíces enésimas de la unidad.

Ej. 11 — Considere una matriz diagonalizable $A = S\,D\,S^{-1}$, con $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Suponiendo que $\lambda_{i+1} - \lambda_i > \epsilon$, evalue (a primer orden) el cambio en los autovalores de A al incrementar el elemento A_{ij} en una cantidad δ. Tip: En la base que diagonaliza A, desarrollar el polinomio característico como una serie de potencias en δ, truncar el desarrollo a primer orden y resolver la ecuación secular "perturbada". ¿Por qué es importante la hipótesis de que $\epsilon > 0$?

Ej. 12 — Derivaciones

a)Demuestre que el operador "derivada" $\partial_x : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ ($\mathcal{C}^\infty = \{f / \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge f$ es derivable a todo orden en cada punto$\}$ que actúa de forma que $(\partial_x f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ es un operador lineal. Determine su núcleo y su imágen. Observe que el operador es un endomorfirmo sobre el subespacio de C^∞ generado por la base $B = \{\cos(\omega x), \sin(\omega x)\}$. Encuentre la representación matricial de la acción de este operador en dicho subespacio respecto de la base B.

b)Considere el operador lineal $\mathbf{X}$ definido sobre $\mathcal{C}^\infty$, que actua como $(\mathbf{Xf})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Determine si existe algún subespacio de $\mathcal{C}^\infty$, de dimensión finita, sobre el que $\mathbf{X}$ actúe como endomorfismo.

c)Muestre que $[\partial_x, \mathbf{X}] = \mathbf{1}$. Observe que no existen pares de operadores en un espacio de dimension finita tales que su conmutador sea el operador $\mathbf{1}$

d)Muestre que $(\partial_x \mathbf{X})^\mathbf{2} = \partial_\mathbf{x}^\mathbf{2} \mathbf{X}^\mathbf{2} - \mathbf{X}\partial_\mathbf{x}$

Ej. 13 — Considere ahora el espacio generado por las primeras n "funciones de Hermite" $\mathcal{F}_n = \overline{\{\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{n-1}\}}$ con $\psi_k(x) = H_k(x)\exp(-x^2/2)/\sqrt{\pi^{1/2}\,2^k\,k!}$, donde $H_k(x)$ el k-ésimo polinomio de Hermite (definidos en la práctica anterior). Sea además $\mathbf{X}_n = \mathbf{P}_n\mathbf{X}\mathbf{P}_n$,($\mathbf{D}_n = \mathbf{P}_n\partial_\mathbf{x}\mathbf{P}_n$)el operador $\mathbf{X}$ (∂_x) "restringido" a $\mathcal{F}_n$ (siendo $\mathbf{P}_n$ el operador proyección que actúa sobre las funciones de Hermite como: $\mathbf{P}_n(\psi_k) = \begin{cases} \psi_k & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$).

a)Escriba las matrices asociadas a los operadores $\mathbf{X}_n$ y $\mathbf{D}_n$ en la base de las funciones de Hermite para $n = 2, 3$ y 4 (nótese que ∂_x sobre los *polinomios* de Hermite es un endomorfismo, pero no así sobre $\mathcal{F}_k$).

b)Usando las ecuaciones de recurrencia $H_{k+1}(x) = 2\,x\,H_k(x) - 2\,k\,H_{k-1}(x)$ y $H_{k+1} = 2\,x\,H_k(x) - H_k'(x)$ (práctica 4) determine la forma general de las matrices $\mathbf{X}_n$ y $\mathbf{D}_n$.

c)Calcule $C_k = [X_k, D_k]$ en esa base y evalue $\operatorname{Tr} C_k$.

d)¿En qué sentido se puede decir que $\lim_k \mathcal{F}_k = \mathcal{C}^\infty$? ¿Qué pasa con los límites de $C_{k\to\infty}$, $\mathbf{P}_{k\to\infty}$ y $\mathbf{X}_{k\to\infty}$?

Ej. 14 — Matrices cíclicas. Considere una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A_{i,j} = f(i-j)$ con $f(i+n) = f(i)$ (cada fila es igual a la fila anterior desplazada cíclicamente una posición a la derecha). Muestre que la matriz es diagonal en la base definida en el Ej. 13 de la práctica 4, y que los autovalores vienen dados por $\lambda_k = \sum_{m=1}^{n} f(m) \exp(-ikm/n)$ (esto es, los autovalores son la "transformada de Fourier discreta" de la última fila).