Práctica 2 - Bases y dimensiones

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Determinar si los conjuntos considerados son base de los respectivos espacios vectoriales. Si no lo son, dar una base de los correspondientes subespacios que generan.

a)$\{(1;1;1);\ (1;2;3);\ (2;-1;1)\} \subset \mathbb{R}^3$

b)$\{(1;1;1;1);\ (1;2;3;2);\ (2;5;6;4);\ (2,6,8,5)\} \subset \mathbb{R}^4$

c)$\{1+t;\ t+t^2;\ t^2+t^3;\ \ldots;\ t^{k-1}+t^k\} \subset \mathbb{P}_k[\mathbb{R}]$

d)$\{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right);\ \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right);\ \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right);\ \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ej. 2 — Determine la dimensión de los siguientes espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales y dé en cada caso una posible base:

a)$\mathbb{R}^{m\times n}$.

b)$\mathbb{S}_m = \{A/\ A \in \mathbb{R}^{m\times m};\ A^t = A)$ (matrices reales de $m \times m$ simétricas).

c)$\mathbb{A}_m = \{A/\ A \in \mathbb{R}^{m\times m};\ A^t = -A\}$ (matrices reales de $m \times m$ antisimétricas).

d)$\mathbb{H}_m = \{H/\ H \in \mathbb{C}^{m\times m};\ H^\dagger = H\}$ (matrices complejas de $m \times m$ hermíticas).

Ej. 3 — En $\mathbb{R}^4$, encuentre una base y la dimensión del subespacio generado por $x = (1,-4,-2,-1)$, $y = (1,-3,-1,2)$, z $= (3,-8,-2,7)$. Extienda la base a una base de $\mathbb{R}^4$.

Ej. 4 — Exprese

a)$D = \left(\begin{smallmatrix}1&-1\\3&1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ como c.l. de $A = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ y $C = \left(\begin{smallmatrix}0&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)$

b)$p(t) = t^2 + 4t - 3 \in \mathbb{P}^{(\mathbb{Q})}[\mathbb{R}]$ (Polinomios de una variable real con coeficientes racionales) como c.l. de $p_1(t) = t^2 - t + 5$, $p_2(t) = 2t^2 - 3t$ y $p_3(t) = t + 3$.

c)Encuentre una condición sobre a, b y c para que (a,b,c) se escriba como c.l. de $u = (1,-3,2)$ y $v = (2,-1,-1)$.

Ej. 5 — Espacios de polinomios

a)Demuestre que $1;\ t;\ t^2;\ \ldots;\ t^k$ son polinomios linealmente independientes sobre el cuerpo de los reales, para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Sugerencia: utilice el teorema fundamental del álgebra.

b)¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{P}_k[\mathbb{R}]$ (Polinomios sobre una variable real con coeficientes reales, de grado $\leq k$)?

c)Justifique la siguiente afirmación: la dimensión de $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$ es infinita.

Ej. 6 — Dado un vector $v = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ (el espacio vectorial de los complejos sobre el cuerpo de los reales),

a)Hallar sus componentes en la base $e_1 = 1$, $e_2 = i$.

b)Hallar sus componentes en la base $e_1' = -1 + i$, $e_2' = 1 + i$.

Ej. 7 — Dado un vector $p(t) = \sum_{n=0}^{3} a_n t^n \in \mathbb{R}_3[\mathbb{R}]$,

a)Hallar sus componentes en la base $e_n = t^{n-1}$ $(n = 1; \ldots 4)$.

b)Hallar sus componentes en la base $e_n' = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$.

Ej. 8 — Encuentre una base y la dimensión de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

1. $W = \{(\alpha, \beta, \gamma)/\alpha + \beta + \gamma = 0\}$.
2. $W = \{(\alpha, \beta, \gamma)/\alpha = \beta = \gamma\}$.

Ej. 9 — Sean $U = \mathcal{S}\{(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)\}$ y $W = \mathcal{S}\{(1,2,2,-2),(2,3,2,-1),(1,3,4,-3)\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$. Encuentre

1. $\dim(\mathrm{U} + \mathrm{W})$
2. $\dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{W})$

Tip: Ya que no se pide una base de esos subespacios, utilice el teorema de la dimensión $\dim(\mathrm{U}+\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{U}) + \dim(\mathrm{V}) - \dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{W})$.

Ej. 10 — Dado el espacio vectorial $\mathbb{V}_{\mathbb{K}}$ de las matrices cuadradas $\mathbb{K}^{n\times n}$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$,

1.Demuestre que $\mathbb{V}_{\mathbb{K}} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ donde $\mathcal{U}$ es el subespacio de las matrices simétricas $M^T = M$ y $\mathcal{W}$ el subespacio de las matrices antisimétricas $M^T = -M$

2.Demuestre que $\mathbb{V}_{\mathbb{K}}$ no es suma directa del subespacio de las matrices triangulares superiores $(\mathcal{TS})$ e inferiores $(\mathcal{TI})$, aunque sí es suma de ambos subespacios.

Ejercicios adicionales (opcionales)

Ej. 11 — Encuentre la dimensión y una base para el espacio vectorial de las soluciones de

$$\begin{cases} x + 2y + z - 3t &= 0 \\ 2x + 4y + 4z - t &= 0 \\ 3x + 6y + 7z + t &= 0 \end{cases}$$

Ej. 12 — Sean $U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)/\ \beta + \gamma + \delta = 0\}$ y $W = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)/\ \alpha + \beta = 0 \wedge \gamma = 2\delta\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$. Encuentre una base y la dimensión de

1.U

2.W

3.$U + W$

4.$U \cap W$

Ej. 13 — Matrices de Pauli: Observe que $\{H/\ H \in \mathcal{H}_2;\ \mathrm{tr}H = \sum_i H_{ii} = 0\}$, el conjunto de las matrices hermíticas de 2×2 cuya traza es nula, es un subespacio de $\mathbb{H}_2$ y que las matrices $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ forman una base de ese subespacio. Expandir en esta base una matriz general H en dicho subespacio, en términos de sus elementos de matriz H_{ij}. Exprese el determinante de H en términos de los coeficientes de expansión en la base dada por los σ_i.