Práctica 1 - Espacios Vectoriales

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Decidir si los siguientes conjuntos definen espacios vectoriales ($\mathbb{V}_{\mathbb{K}}$) es el conjunto de vectores, $\mathbb{K}$ es el conjunto de escalares y $\lambda \in \mathbb{K}$. Si no se especifica otra cosa, asumir que las operaciones de $\oplus$ y $*$ son las naturales para esos conjuntos:

1. $\mathbb{V}_{\mathbb{K}} := \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
2. $\mathbb{V}_{\mathbb{K}} = R_+$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con $\oplus$ el producto usual en $\mathbb{R}$ y el producto externo $*$ definido por $\lambda * x = x^{\lambda}$ (con la definición usual de potenciación en $\mathbb{R}$).
3. $\mathbb{V}_{\mathbb{K}} = \{(\xi, \eta)/\xi, \eta \in \mathbb{C}\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, con la suma dada por $(\xi_1, \eta_1) \oplus (\xi_2, \eta_2) = (\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2)$ y el producto externo por $\lambda * (\xi_1, \eta_1) = (\lambda\, \xi_1, 0)$.
4. $\mathbb{V}_{\mathbb{K}} = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con $\oplus$ el producto usual en $\mathbb{R}$ y el producto externo $*$ definido por $\lambda * x = \lambda^2\, x$ (con la definición usual de producto en $\mathbb{R}$).

Ej. 2 — Demuestre que el conjunto de las matrices hermíticas $H_n := \{M \in \mathbb{C}^{n\times n}/\ M = M^{\dagger}\}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales ($\mathbb{R}$) pero no sobre los complejos ($\mathbb{C}$).

Ej. 3 — Demuestre que

a) las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales a coeficientes reales forman un espacio vectorial.

b) el conjunto de las funciones reales periódicas en en intervalo $[0, 1]$, $\mathbb{V}_: = \{f/f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0) = f(1)\}$ con las operaciones usuales de suma y producto forman un espacio vectorial.

c) las soluciones de una ecuación diferencial homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ – con $p(x)$ y y $q(x)$ funciones a valores reales no singulares – forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma y producto. ¿Pasa lo mismo con las soluciones de $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, si $f(x)$ no es idénticamente nula?

Ej. 4 — Determine si:

a) los cuatro puntos (1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 2) y (0, 3, 2) de $\mathbb{R}^3$ son coplanarios.

b) en $\mathbb{R}^2$, $(1, 1)$ es combinación lineal de $(1, 1)$ y $(1, 2)$. ¿Y $(0, 0)$?.

c) en $\mathbb{R}^3$, exprese $v = (1, -2, 5)$ como combinación lineal (c.l.) de $u_1 = (1, -3, 2)$, $u_2 = (2, -4, 1)$ y $u_3 = (1, -5, 7)$.

d) las matrices $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{smallmatrix}\right)\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ son l.i.

Ej. 5 — Determine si las funciones $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x+\pi/3)$ son linealmente independientes en el espacio vectorial de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ej. 6 — Decir por qué los siguientes subconjuntos de vectores $\mathbb{V}$ en $\mathbb{R}^3$ *no* forman un espacio vectorial con escalares en $\mathbb{R}$ y las operaciones de $+$ y $*$ en $\mathbb{R}$. ($\overline{\mathbb{V}} := \{v/v \in \mathbb{R}^3\ ; x \notin \mathbb{V}\ \}$ es el complemento de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{R}^3$):

1. $\mathbb{V}_: = \{(x; y; z)/\, x; y; z \in \mathbb{R}\ ; z > 0\}$.
2. $\mathbb{V}\ /\ \overline{\mathbb{V}} := \{(1; 2; 3)\}$.
3. $\mathbb{V}\ /\ \overline{\mathbb{V}} := \{(x, y, 0)/x; y \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{V}\ /\ \overline{\mathbb{V}} := \{(x, 0, 0)/x \in \mathbb{R}\ ; x > 0\}$.

Ej. 7 — Muestre que el conjunto de soluciones $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ del sistema de ecuaciones $AX = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz constante es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Sucede lo mismo con las soluciones de $AX = B$, con B una matriz columna no nula?

Ej. 8 — En el espacio de matrices complejas $\mathbb{C}^{n\times n}$, sobre $\mathbb{R}$, ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios?

1.Las matrices reales, $A^* = A$.

2.Las matrices simétricas, $A^T = A$.

3.Las matrices hermíticas o autoadjuntas $A^\dagger = A$

4.Las matrices de traza nula, $\mathrm{TrA} = 0$.

¿En qué casos esto se mantiene si consideramos el espacio $\mathbb{C}^{n\times n}$, sobre $\mathbb{C}$?

Ej. 9 — ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio de las funciones reales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son subespacios sobre $\mathbb{R}$?

1.Las funciones derivables.

2.Las funciones crecientes.

3.Las funciones que se anulan en 0.

4.Las funciones tales que $f(x) \leq f(2x)$.

5.Las funciones tales que $f(1) = 5\, f(4)$.

Ej. 10 — ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del conjunto de polinomios sobre una variable real $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$?

1.El conjunto de los polinomios con coeficientes enteros.

2.El conjunto de polinomios de grado menor o igual que 3.

3.Los polinomios con sólo potencias pares de t.