Repaso

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Dadas las siguientes transformaciones linales, determinar su núcleo e imagen y encontrar su representación matricial en la(s) correspondientes base(s) canónica(s):

a)$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(1,1) = (1,0), f(1,-1) = (0,1)$

b)$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 / f(3,2,1,4) = (1,2), f(-1,2,1,1) = (-2,2), f(0,1,-1,0) = (0,0), f(0,1,0,2) = (1,3)$

c)$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / f(-1,3) = (1,2,7), f(1,1) = (9,2,2)$

d)$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / f(-1,3,3) = (1,-2,7), f(1,3,1) = (-2,-2,-2), f(1,-3,1) = (-2,2,-2)$

e)$f : \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \to \mathbb{P}_4[\mathbb{R}] / f[p](x) = p'(x) + x\,p(x)$

Ej. 2 — Sean $J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a)Muestre que estas matrices son base de las matrices antisimétricas en $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

b)Considere la transformación $T_\theta : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por $T_\theta(M) = O_\theta.M.O_\theta^{\mathrm{t}}$ siendo

$$O_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Muestre que es una transformación lineal y calcule la matriz asociada a la transformación en la base $B = \{J_x, J_y, J_z\}$.

Ej. 3 — Determinar bases de los espacios fila y columna de las siguientes matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ej. 4 — Encontrar los autovectores y autovalores normalizados de las siguientes matrices B_n. En caso de ser posible, hallar una base ortonormal respecto de la cual B_n sea diagonal.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} -3 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}$$

Ej. 5 — Dadas las siguientes matrices simétricas S_n, encuentre una matriz de cambio de base ortonormal O_n tal que $O_n S_n O_n^{\mathrm{t}}$ resulte diagonal (recordar que $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$).

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad S_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad S_8 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej. 6 — Calcular para cada A_n, A_n^3, $\exp(A_n)$, A_n^{-1}, $\ln(A_n)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ej. 7 — Encontrar una base y la dimensión de los siguientes subespacios.

a)$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\, , x + y - z = 0 \wedge x - t + 3\,z = 0\}$

b)$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3\, , y + 3\,z + 5t = 0 \wedge x - t - 2\,z = 0 \wedge 5x + y - 7\,z = 0\}$

c)$W = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5\, , t + 2\,w + x - 2\,z = 0 \wedge x + 2\,y - w = 0\}$

d)$T = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5\, , t + 2w + 2x + 2y - 3z = 0 \wedge t + 2w - x - 4y = 0 \wedge 2t + 4w + 5x + 6y - 7\,z = 0\}$

e)$U + V$

f)$U \cap V$

g)$V + W$

h)$V \cap W$

Ej. 8 — Encuentre los autovectores y autovalores de las siguientes matrices en función del parámetro ϵ

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \epsilon \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ej. 9 — Encuentre la expresión del término general y el límite asintótico para las siguientes formulas de recurrencia:

1.$x_0 = 1$,$x_1 = -1$, $x_{n+1} = x_n + 2\,x_{n-1}$

2.$x_0 = 1$,$x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{3}{2}x_{n-1})$

3.$x_0 = 1$,$x_1 = 2$, $x_{n+1} = (4\,x_n - 5\,x_{n-1})$

Ej. 10 — Considere los conjuntos $\mathcal{C}_{A,b,c} = \{x \in \mathbb{R}^2\, / x^t \cdot A \cdot x + b^t \cdot x = c\}$ donde $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^2$ y $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Determine una parametrización de los puntos contenidos en $\mathcal{C}_{A,c}$ para los siguientes $\mathcal{C}_{A,c}$:

1.$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, b = (1, 1)^t\, , c = 2$

2.$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, b = (1, -1)^t\, , c = 1$

3.$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = (1, -1)\, , c = 1$

4.$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = (1, 1)\, , c = 1$

Tip: realizar un cambio de variables $x' = R.x$ respecto del cual $R.A.R^t$ resulte diagonal, y expresar la ecuación cuadrática en esa base.