

Repaso

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Dadas las siguientes transformaciones lineales, determinar su núcleo e imagen y encontrar su representación matricial en la(s) correspondiente(s) base(s) canónica(s):

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(1, 1) = (1, 0), f(1, -1) = (0, 1)$

b) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(3, 2, 1, 4) = (1, 2), f(-1, 2, 1, 1) = (-2, 2), f(0, 1, -1, 0) = (0, 0), f(0, 1, 0, 2) = (1, 3)$

c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(-1, 3) = (1, 2, 7), f(1, 1) = (9, 2, 2)$

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(-1, 3, 3) = (1, -2, 7), f(1, 3, 1) = (-2, -2, -2), f(1, -3, 1) = (-2, 2, -2)$

e) $f : \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{P}_4[\mathbb{R}] / f[p](x) = p'(x) + x p(x)$

Ej. 2 — Sean $J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Muestre que estas matrices son base de las matrices antisimétricas en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

b) Considere la transformación $T_\theta : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definida por $T_\theta(M) = O_\theta \cdot M \cdot O_\theta^t$ siendo

$$O_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Muestre que es una transformación lineal y calcule la matriz asociada a la transformación en la base $B = \{J_x, J_y, J_z\}$.

Ej. 3 — Determinar bases de los espacios fila y columna de las siguientes matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ej. 4 — Encontrar los autovectores y autovalores normalizados de las siguientes matrices B_n . En caso de ser posible, hallar una base ortonormal respecto de la cual B_n sea diagonal.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} -3 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}$$

Ej. 5 — Dadas las siguientes matrices simétricas S_n , encuentre una matriz de cambio de base ortonormal O_n tal que $O_n S_n O_n^t$ resulte diagonal (recordar que $O^t = O^{-1}$).

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad S_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad S_8 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej. 6 — Calcular para cada A_n , A_n^3 , $\exp(A_n)$, A_n^{-1} , $\ln(A_n)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ej. 7 — Encontrar una base y la dimensión de los siguientes subespacios.

- a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 0 \wedge x - t + 3z = 0\}$
- b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3, y + 3z + 5t = 0 \wedge x - t - 2z = 0 \wedge 5x + y - 7z = 0\}$
- c) $W = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5, t + 2w + x - 2z = 0 \wedge x + 2y - w = 0\}$
- d) $T = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5, t + 2w + 2x + 2y - 3z = 0 \wedge t + 2w - x - 4y = 0 \wedge 2t + 4w + 5x + 6y - 7z = 0\}$
- e) $U + V$
- f) $U \cap V$
- g) $V + W$
- h) $V \cap W$

Ej. 8 — Encuentre la expresión del término general y el límite asintótico para las siguientes formulas de recurrencia:

1. $x_0 = 1, x_1 = -1, x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$
2. $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{3}{2}x_{n-1})$
3. $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = (4x_n - 5x_{n-1})$