

Práctica 5 - Forma de Jordan / Teorema de Cayley - Hamilton

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Dada la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

con $A = S_A \tilde{A} S_A^{-1}$ y $B = S_B \tilde{B} S_B^{-1}$ matrices diagonalizables,

- Muestre que el conjunto de los autovalores de M es la unión de los conjuntos de autovalores de A y B .
- Pruebe que para cada autovector v_A de A existe un autovector $w_{AB} = \begin{pmatrix} v_A \\ 0 \end{pmatrix}$ de M , asociado al mismo autovalor.
- asumiendo que v_B es un autovector de B con autovalor λ , y que A no tiene a λ entre sus autovalores, construya un autovector de M con autovalor λ en términos de A , C , λ y v_B . ¿Qué ocurriría si λ fuese autovalor de A ?

Ej. 2 — Encuentre los autovectores y autovalores de las siguientes matrices en función del parámetro ϵ

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \epsilon \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ej. 3 — Encuentre la forma de Jordan de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ej. 4 — Encuentre el polinomio característico y el polinomio mínimo de las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ej. 5 — Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ verifique el teorema de Cayley-Hamilton. Luego calcule A^2 , A^3 y A^{-1} .

Ej. 6 — Considere el operador $F : \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ que actúa como $F[p(x)] = \frac{\partial}{\partial x}(x p(x))$.

- Halle su representación matricial en la base canónica ($B = \{1, x, x^2, x^3\}$).
- Calcule su polinomio característico

- c) Determine sus correspondientes autovalores y autovectores, indicando una base para cada subespacio.
d) Repita los cálculos para el operador ∂_x .

Ej. 7 — Sea \mathbf{A} un operador nilpotente de grado q , que actúa sobre los vectores de un espacio vectorial de dimensión n .

1. Muestre que existe un $x_0 \neq 0$ tal que $\{x_0, \mathbf{A}x_0, \dots, \mathbf{A}^{q-1}x_0\}$ forman un conjunto de vectores linealmente independientes. Como corolario, $q \leq n$.
2. A partir del resultado anterior, muestre que por ejemplo, no puede definirse la raíz cuadrada de una matriz nilpotente de orden n (ej: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).
3. Suponiendo que $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ es una matriz diagonalizable, encuentre todas las posibles raíces cuadradas en términos de sus autovectores y autovalores.
4. Considere ahora la familia $B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Encuentre $B^{1/2}(\lambda)$. ¿Qué pasa en el límite $\lambda \rightarrow 0$?

Ej. 8 — Usando el teorema de Jordan, pruebe que

- a) $\ln(\det(A)) = \text{tr}(\ln(A))$
- b) $\det \exp(A) \neq 0$
- c) $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$

Ej. 9 — Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales para la condición inicial $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 5x(t) - y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x(t) + 3y(t) \end{cases}$$