

Solución exacta para el disco conductor a potencial fijo

May 23, 2019

Problema: Un disco conductor de radio a y espesor despreciable se encuentra conectado a una diferencia de potencial de $9V$ respecto a tierra. Determine el potencial electrostático y la correspondiente distribución de cargas.

Solución*

Para resolver el problema de condiciones de borde, proponemos las *coordenadas esferoides oblatas*:

$$\begin{aligned}x &= a\sqrt{1+\zeta^2}\sin(\eta)\cos(\phi) \\y &= a\sqrt{1+\zeta^2}\sin(\eta)\sin(\phi) \\z &= a\zeta\cos(\eta)\end{aligned}$$

donde el factor r que encontrábamos en coordenadas esféricas, se reemplaza por los factores $a\sqrt{1+\zeta^2}$ en las coordenadas x e y , y por $a\zeta$ en la coordenada z , de manera que para valores grandes de ζ , $\zeta \rightarrow r/a = \sqrt{x^2+y^2+z^2}/a$. Identificamos además $\sqrt{1+\zeta^2}\cos(\eta) = \cos(\theta)$, donde θ es la coordenada azimutal usual.

Por otro lado, si $\zeta \rightarrow 0$, $\vec{r} = (x, y, z)$ queda restringido al disco de radio a y espesor 0 .

Las superficies con $\zeta = \text{cte}$ corresponden a elipsoides de revolución de radio mayor $a\sqrt{1+\zeta^2}$ y radio menor $a\zeta$, en la dirección perpendicular al disco $\zeta = 0$.

Construimos entonces la base de vectores asociados

$$\begin{aligned}\vec{h}_\zeta &= a\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}\sin(\theta)\cos(\phi), \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}\sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)\right) = h_\zeta\check{e}_\zeta \\ \vec{h}_\eta &= a\left(\sqrt{1+\zeta^2}\cos(\eta)\cos(\phi), \sqrt{1+\zeta^2}\cos(\eta)\sin(\phi), -\zeta\sin(\eta)\right) = h_\eta\check{e}_\eta \\ \vec{h}_\phi &= a\sqrt{1+\zeta^2}\sin(\eta)(-\sin(\phi), \cos(\phi), 0) = h_\phi\check{e}_\phi\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}h_\zeta &= a\sqrt{\frac{\zeta^2 + \cos^2(\eta)}{1 + \zeta^2}} \\ h_\eta &= a\sqrt{\zeta^2 + \cos^2(\eta)} \\ h_\phi &= a\sqrt{1 + \zeta^2}\sin(\eta) = a\frac{h_\eta}{h_\zeta}\sin(\eta)\end{aligned}$$

y \check{e}_ζ , \check{e}_η , y \check{e}_ϕ vectores ortonormales.

De esta manera, el elemento de volumen es $\Omega = h_\zeta h_\eta h_\phi = a^3 \sin(\eta)(\cos^2(\eta) + \zeta^2)$ y el Laplaciano en estas coordenadas se escribe como

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\Omega}{h_\zeta^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\Omega}{h_\eta^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\Omega}{h_\phi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}$$

ó, remplazando,

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{a^2(\cos^2(\eta) + \zeta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} (1 + \zeta^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + \frac{1}{\sin(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \sin(\eta) \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\cos^2(\eta) + \zeta^2}{(1 + \zeta^2) \sin(\eta)^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right)$$

Proponiendo una solución en la forma de variables separables $\Psi(\zeta, \eta, \phi) = Q(\zeta)T(\eta, \phi)$, y notando que $\Psi(0, \eta, \phi) = Q(0)T(\eta, \phi) = V_0$, concluimos que $\Psi(\zeta, \eta, \phi) = \Psi(\zeta)$, de manera que la Ec. de Laplace se reduce a

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} (1 + \zeta^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \right) = 0$$

cuya solución general es

$$\Psi(\zeta) = \Psi(0) + \Psi'(0) \int_0^\zeta \frac{dz}{1+z^2} = \Psi(0) + \Psi'(0) \arctan(\zeta)$$

Si fijamos $\Psi(\infty) \rightarrow 0 \Rightarrow \Psi'(0) = -\Psi(0) \frac{2}{\pi}$

Conviene escribir ahora ζ en función de las coordenadas esféricas usuales. Para eso, observamos que

$$\cos^2(\eta) = 1 - \sin^2(\eta) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2(1 + \zeta^2)} = 1 - \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{a^2(1 + \zeta^2)}$$

y

$$z^2 = r^2 \cos^2(\theta) = a^2 \zeta^2 \cos(\eta)^2 = \zeta^2 \frac{a^2(1 + \zeta^2) - r^2 \sin^2(\theta)}{1 + \zeta^2}$$

luego,

$$(1 + \zeta^2)r^2 \cos^2(\theta) = a^2 \zeta^4 - \zeta^2(r^2 \sin^2(\theta) - a^2)$$

y finalmente,

$$\zeta = \sqrt{\frac{(r/a)^2 - 1 + \sqrt{((r/a)^2 - 1)^2 + 4(r/a)^2 \cos^2(\theta)}}{2}}$$

Para $r \gg a$, $\zeta \rightarrow r/a$ y (como $\arctan(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$)

$$V(r) \rightarrow \frac{8\epsilon_0 a V_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Para estudiar el potencial sobre la superficie del disco, conviene reescribir el problema en coordenadas cilíndricas: $z = r \cos(\theta)$, $\rho = \sin(\theta)r$:

$$\zeta = \sqrt{\frac{(\rho/a)^2 + (z/a)^2 - 1 + \sqrt{(1 - (\rho/a)^2 + (z/a)^2)^2 + 4(z/a)^2}}{2}}$$

sobre la superficie,

$$\zeta \rightarrow \frac{z}{a\sqrt{1 - (\rho/a)^2}}$$

de manera que sobre el disco, el potencial se comporta como

$$V(\vec{r}) \approx V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{z}{a\sqrt{1 - (\rho/a)^2}}\right)$$

de donde podemos calcular la densidad superficial de carga como

$$\sigma = -2\epsilon_0 \nabla V = \frac{4\epsilon_0 V_0}{a\pi\sqrt{1 - (\rho/a)^2}}$$

Integrando, sobre todo el disco,

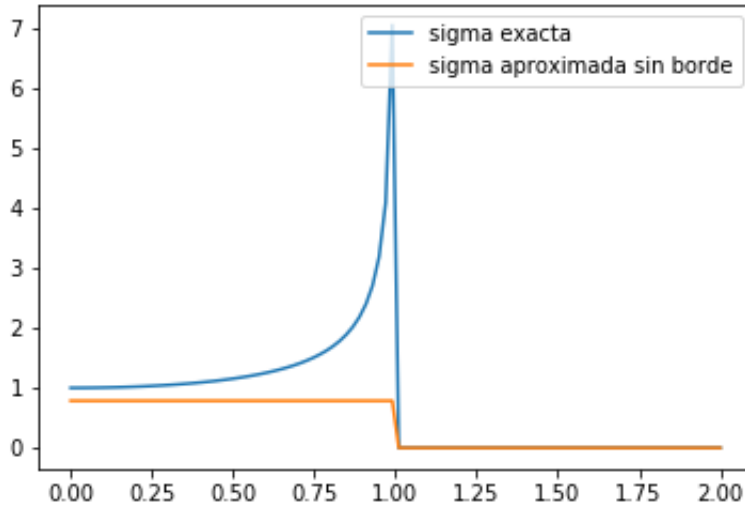
$$Q = \iint \sigma dS = 8\epsilon_0 \frac{V_0}{a} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - (\rho/a)^2}} = 8\epsilon_0 a V_0$$

que es consistente con el comportamiento asintótico.

Finalmente, si $z \approx 0$ y $\rho > a$,

$$V(\vec{r}) \approx V_0 - \frac{2V_0}{\pi} \arctan(\sqrt{(\rho/a)^2 - 1})$$

En la gráfica encontramos la comparación entre la densidad superficial de carga exacta y la aproximada por una densidad de carga constante, para obtener el mismo valor de potencial en el centro de la distribución:



```
In [12]: %matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
R = np.linspace(0,2,100)
sigma = np.array([1/np.sqrt(1-r**2) if r<1 else 0 for r in R])
sigmaapp = np.array([6.2832/8. if r<1 else 0 for r in R])

plt.plot(R,sigma,label="sigma exacta")
plt.plot(R, sigmaapp,label="sigma aproximada sin borde")
plt.legend()

plt.savefig("chargedensity.png")
```

