Física General I – Año 2016
Trabajo Práctico 1: Vectores

1. El radio medio de la Tierra es 6.37×10^6 m, y el de la Luna es 1.74×10^6 m. Con estos datos, calcular: a) la proporción entre el área superficial de la Tierra y la Luna y b) la proporción entre los volúmenes de la Tierra y la Luna. c) Sabiendo que la densidad promedio de la Tierra es de 5.54 g/cm^3, calcular la masa de la Tierra.

2. Un vehículo viaja a 38 millas por hora. ¿Cuál es su velocidad en a) kilómetros por hora, b) metros por segundo?

3. Denotaremos con $[X]$ a la dimensión de una magnitud física X. De este modo, $[m]$, $[l]$ y $[t]$ denotan dimensiones de masa, longitud y tiempo, respectivamente. En el sistema internacional (SI) éstas son kilogramo (kg), metro (m) y segundo (s). En términos de estas dimensiones, las de otras magnitudes que se introducirán durante el curso son:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Velocidad } (v) & \ldots\ldots\ldots\ldots & [l]/[t] \\
\text{Aceleración } (a) & \ldots\ldots\ldots\ldots & [l]/[t]^2 \\
\text{Fuerza } (F) & \ldots\ldots\ldots\ldots & [m][l]/[t]^2 \\
\text{Energía } (E) & \ldots\ldots\ldots\ldots & [m][l]^2/[t]^2 \\
\text{Potencia } (P) & \ldots\ldots\ldots\ldots & [E]/[t] \\
\text{Densidad } (\rho) & \ldots\ldots\ldots\ldots & [m]/[l]^3 \\
\text{Área } (A) & \ldots\ldots\ldots\ldots & [l]^2 \\
\text{Volumen (V)} & \ldots\ldots\ldots\ldots & [l]^3
\end{array}$$

   a) Probar que las expresiones $\frac{1}{2}mv^2$, mgh y Fl tienen dimensiones de energía (aquí g es la aceleración de la gravedad, y h denota altura por sobre algún nivel de referencia). b) Probar que Ft tiene las mismas dimensiones que mv.

4. En las expresiones siguientes, la distancia x está en metros, el tiempo t en segundos y a denota el módulo de la aceleración. Hallar en cada caso las dimensiones de las constantes C_1, C_2 y C_3. a) $x = C_1 + C_2\,t + C_3\,t^2$. b) $x = C_1 \operatorname{sen}(C_2\,t)$. c) $a = C_1 \cos(C_2\,t + C_3)$.

5. a) Supongamos que el módulo del desplazamiento s de una partícula que se mueve con una aceleración uniforme $\vec{a}$ puede escribirse en función de a y del tiempo transcurrido t en la forma $s = k\,a^m\,t^n$, donde k es una constante adimensional. Mostrar mediante análisis dimensional que esta expresión es correcta sólo si $m = 1$ y $n = 2$. b) El módulo a de la aceleración de una partícula que se mueve con módulo v de velocidad constante sobre una circunferencia de radio r viene dado por $a = v^m\,r^n$. Hallar m y n.

6. Para el sistema de ejes coordenados y los vectores representados en la Fig. 1, indicar qué vector o vectores a) tienen componente x distinta de cero; b) tienen componente x negativa; c) tienen componente y cero; d) tienen componente x positiva y componente y negativa. e) Indicar cuál de los vectores representados es el de mayor módulo. f) ¿Tiene sentido afirmar que un vector es "positivo" o "negativo"?

7. Un punto se localiza en un sistema de coordenadas polares mediante las coordenadas r = 4 m y $\theta = 30°$. Determinar sus coordenadas en el correspondiente sistema de ejes cartesianos.

8. Dos puntos en el plano xy tienen coordenadas canónicas $(2, 4)$ m y $(-3, 3)$ m. a) Determinar las coordenadas polares correspondientes. b) Calcular la distancia entre los puntos.

9. Dado un sistema de dos ejes cartesianos, calcular las componentes y el módulo de un vector cuyo origen está en el punto (1,2) y su extremo en el punto (5,5). Graficar este vector y escribirlo en forma canónica.

10. Representar un vector $\vec{V}$ que tenga componentes x e y de igual magnitud, siendo V_x positiva y V_y negativa. ¿Cuánto vale el cociente V_y/V? <u>Notación</u>: para una magnitud vectorial $\vec{V}$ denotaremos $V \equiv |\vec{V}|$.

11. Dados los vectores $\vec{A} = 2\,\breve{\imath} + 6\,\breve{\jmath}$ y $\vec{B} = \breve{\imath} - 2\,\breve{\jmath}$: a) Usando la regla del paralelogramo, representar el vector suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ y el vector $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$. b) Calcular las componentes de $\vec{C}$ en coordenadas cartesianas y polares. c) Calcular las componentes del versor $\breve{C}$ y del versor $\breve{D}$.

12. Para cada uno de los incisos calcular $\vec{A}-\vec{B}$, $\vec{A}+2\vec{B}$ y $|\vec{A}-\vec{B}|$. Representar gráficamente. a) $\vec{A}=(2,3)$, $\vec{B}=(-1,1)$; b) $\vec{A}=\check{\imath}+2\check{\jmath}$, $\vec{B}=\frac{1}{2}\check{\imath}-2\check{\jmath}$; c) $\vec{A}=\check{\imath}$, $\vec{B}=-\check{\jmath}$.

13. Calcular las componentes B_x y B_y de un vector $\vec{B}$ que tenga módulo 4 y sea paralelo al vector $\vec{A}=3\check{\imath}-4\check{\jmath}$. ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el eje x?

14. El *producto escalar* de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota $C=\vec{A}\cdot\vec{B}$. a) ¿Puede asignársele una dirección a C? b) ¿Puede ocurrir que sea $C=0$ aun siendo A y B diferentes de cero? c) Si se deja $\vec{A}$ fijo y se varía la dirección de $\vec{B}$, para qué dirección de $\vec{B}$ se obtiene un valor máximo y un valor mínimo del producto escalar C?

15. Dados los vectores $\vec{V_1}=\check{\imath}+3\check{\jmath}-2\check{k}$, $\vec{V_2}=2\check{\imath}+6\check{\jmath}-4\check{k}$, $\vec{V_3}=-3\check{\imath}+4\check{\jmath}$: a) Calcular $\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}+\vec{V_3})$, $\vec{V_1}-|\vec{V_3}|\vec{V_2}$, $\check{k}\cdot\vec{V_2}/V_3$. b) Determinar el ángulo formado entre los vectores $\vec{V_1}$ y $\vec{V_2}$ y el ángulo formado entre $\vec{V_1}$ y el eje y. c) Hallar a tal que el vector $(-1,a,1)$ sea ortogonal a $\vec{V_1}$.

16. El *producto vectorial* de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$. a) Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano de la hoja, ¿qué dirección(es) puede tener $\vec{C}$? b) Si se deja $\vec{A}$ fijo y se varía la dirección de $\vec{B}$, para qué dirección(es) de $\vec{B}$ se obtiene un valor máximo y un valor mínimo de $|\vec{C}|$?

17. Considere un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha=\pi/6$ con la horizontal. Definamos un sistema de coordenadas eligiendo el versor $\check{\imath}$ horizontal apuntando hacia la derecha y el versor $\check{\jmath}$ vertical apuntando hacia arriba. a) encuentre las componentes de los versores $\check{n}$, normal al plano inclinado, y $\check{t}$, paralelo al mismo, respecto a $\check{\imath}$ y $\check{\jmath}$. b) Definamos el vector $\vec{A}=3\check{n}+2\check{t}$. Escriba el vector $\vec{A}$ como combinación lineal de $\check{\imath}$ y $\check{\jmath}$, esto es, encuentre a y b tal que $\vec{A}=a\check{\imath}+b\check{\jmath}$. Observe que los versones $\check{n}$ y $\check{t}$ definen un sistema de coordenadas cartesianas con ejes rotados respecto a la horizontal. La última operación equivale a transformar las coordenadas de $\vec{A}$ pasando de componentes dadas en el sistema definido por $\check{t}$ y $\check{n}$ a las componentes correspondientes en el sistema $\check{\imath}$ y $\check{\jmath}$. c) calcule ahora las componentes del vector $\vec{B}=2\check{\imath}+4\check{\jmath}$ en el sistema $\check{t}$ y $\check{n}$.

Problemas adicionales

18. a) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo? b) ¿Qué relación existe entre los ángulos agudos de un triángulo rectángulo? c) ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero? d) ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo isósceles de lados a, a y $a/2$? e) Un cazador sale en busca de comida. Camina 10 km hacia el Sur, luego 10 km hacia el Oeste y finalmente, camina 10 km hacia el Norte para regresar al punto de partida. ¿De que color es el oso que cazó?

19. Probar las siguientes identidades trigonométricas: a) $1+\tan^2\theta=1/\cos^2\theta$; b) $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$; c) $\operatorname{sen}^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$; d) $\operatorname{sen}(2\alpha)+\operatorname{sen}(2\beta)=2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; e) $\cos(\alpha)-\cos(\beta)=2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\right)$; f) $\tan(\alpha)+\tan(\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$.

20. Dados los vectores $\vec{A}=3\check{\imath}+4\check{\jmath}$, $\vec{B}=-\check{\imath}+2\check{\jmath}$ y $\vec{C}=\check{\jmath}-3\check{k}$, verificar, usando la expresión del producto escalar en términos de componentes, que: a) $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$; b) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$; c) $|\vec{A}+\vec{B}|^2=A^2+B^2+2(\vec{A}\cdot\vec{B})$.

21. a) Dados los vectores $\vec{V_i}$, $i=1,2,3$ ($\vec{V_1}=\check{\imath}+3\check{\jmath}-2\check{k}$, $\vec{V_2}=2\check{\imath}+6\check{\jmath}-4\check{k}$, $\vec{V_3}=-3\check{\imath}+4\check{\jmath}$), calcular $\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}\times\vec{V_3})$, $2\vec{V_1}\times\vec{V_3}$ y $\vec{V_1}\times\check{\jmath}$. b) Verificar que $\vec{V_1}\times\lambda\vec{V_1}=0$ para cualquier λ real. c) Probar que los vectores $(3,1,-2)$ y $(1,1,2)$ son perpendiculares. d) ¿Podría haberse anticipado el resultado $\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}\times\vec{V_3})=0$?

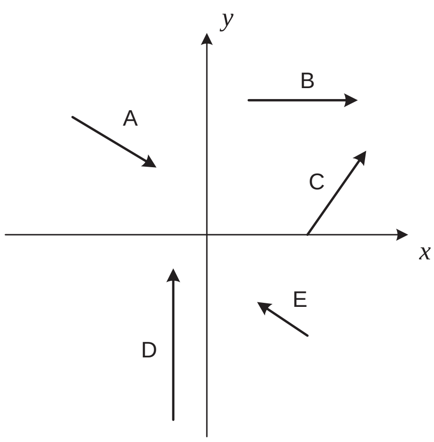

Fig. 1