MOVIMIENTO CIRCULAR Y DE ROTACIÓN (NOTAS INCONCLUSAS)

TOMÁS S. GRIGERA

1. Introducción

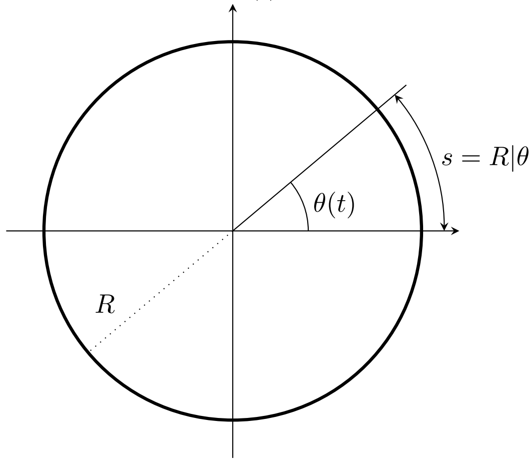
1.1. Requisitos. Esta presentación supone que el lector está familiarizado con los siguientes conceptos:

1. **Vectores:** Noción de vector, operaciones elementales entre vectores y escalares, coordenadas cartesianas como proyección sobre los versores base, producto escalar, producto vectorial.
2. **Derivada:** Noción de derivada y reglas de derivación (derivada de la suma, producto, cociente y composición de funciones).
3. **Cinemática:** Descripción vectorial de trayectorias, velocidad, aceleración.

El apéndice A presenta resumidamente estos conceptos.

2. Movimiento circular

2.1. Descripción unidimensional. La forma más sencilla de describir una partícula que se mueve describiendo una circunferencia es utilizar un sistema de referencia (SR) cuyo origen coincida con el centro de la misma y un sistema de coordenadas (SC) tal que el plano del movimiento coincida con el plano xy (si se trata de describir una única partícula, siempre es posible elegir tal SC). Entonces la distancia de la partícula al origen será siempre R (el radio de la circunferencia) y para determinar la posición en un instante de tiempo basta especificar una sola coordenada, el ángulo $\theta(t)$ que forma el vector posición con el eje x.



Date: 17 de abril de 2016.

Análogamente a la velocidad y la aceleración definimos la *velocidad angular* ω y la *aceleración angular* α:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{1}$$

Puesto que el ángulo es una cantidad adimensional, se sigue que las dimensiones de α y ω son

$$[\omega] = \frac{1}{T}, \qquad [\alpha] = \frac{1}{T^2}, \tag{2}$$

de modo que 1/s, por ejemplo, es una unidad de velocidad angular. Sin embargo se suele utilizar rad/s (o rad/s^2 para la aceleración) para evitar confusión con la frecuencia (definida más abajo).

Conociendo $\alpha(t)$ puede obtenerse $\theta(t)$ por sucesivas integraciones del mismo modo que se obtiene la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ a partir de la aceleración. En particular, en el caso de α constante,

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2. \tag{3}$$

2.1.1. Frecuencia y período. Para el caso de velocidad angular constante ($\alpha = 0$), definimos el *período* T como el tiempo necesario para que la partícula recorra la circunferencia completa (es decir un ángulo de 2π). La relación entre el período y la velocidad angular es

$$\theta(T + t_0) - \theta(t_0) = \omega T = 2\pi, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{4}$$

T tiene evidentemente dimensión de tiempo.

La *frecuencia* se define como la inversa del período, esto es el número de revoluciones completadas en la unidad de tiempo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{5}$$

2.1.2. Velocidad angular y velocidad tangencial. Cuando es necesario distinguir entre velocidad angular y la velocidad a secas ($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$) se denomina a veces a esta ultima *velocidad tangencial* (redundantemente, puesto que la velocidad por definición es *siempre* tangencial a la trayectoria). Recordemos que la distancia recorrida en un intervalo de tiempo está dada por

$$d(t; t_0) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(t')|\, dt'. \tag{6}$$

Análogamente, la distancia angular se puede calcular como

$$\delta(t; t_0) = \int_{t_0}^{t} |\omega(t')|\, dt'. \tag{7}$$

Puesto que el movimiento es circular, la distancia correspondiente es $d(t; t_0) = R\delta(t; t_0)$. Sustituyendo las respectivas distancias por sus definiciones y derivando respecto de t se sigue que

$$v(t) \equiv |\mathbf{v}(t)| = R|\omega(t)|. \tag{8}$$

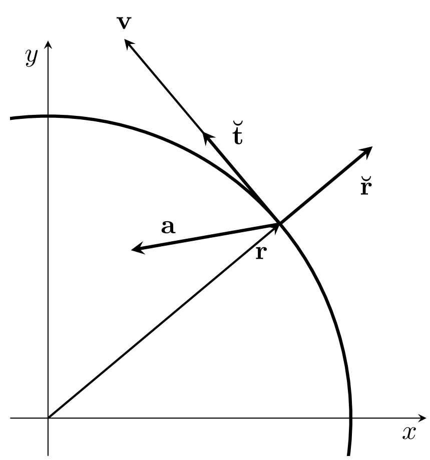
2.2. Descripción vectorial. La descripción anterior, aunque conveniente en muchos casos, es insuficiente cuando se quieren analizar las fuerzas que producen el movimiento circular: para aplicar la segunda ley de Newton es necesario conocer las tres componentes cartesianas del vector aceleración.

2.2.1. Aceleración radial y tangencial. Consideremos primero el caso en que el plano del movimiento coincide con el plano xy y su centro con el origen de coordenadas. El vector posición $\mathbf{r}(t)$, en este SR es de módulo constante, $|\mathbf{r}(t)| = R$. Se sigue entonces que la tangente a la trayectoria (dada por la velocidad), es perpendicular a $\mathbf{r}(t)$ (ver Ap. B):

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0. \tag{9}$$

Para interpretar la aceleración $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt$ es conveniente descomponerla utilizando los ejes dados por los versores $\check{\mathbf{r}}$ y $\check{\mathbf{t}}$, respectivamente radial y tangencial (ver fig).

$$\check{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}, \qquad \check{\mathbf{t}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}. \tag{10}$$



Para encontrar las componentes proyectaremos sobre los respectivos versores (sec. A.1.2). Calculemos primero

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{v} = -v^2, \tag{11}$$

pues $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$, y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} = v\frac{dv}{dt}. \tag{12}$$

Dividiendo entonces por los módulos r y v, obtenemos

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} = a_r \check{\mathbf{r}} + a_t \check{\mathbf{t}}, && \\ &a_r = \check{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a} = -\frac{v^2}{R}, && \text{aceleración radial,} \\ &a_t = \check{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{a} = \frac{dv}{dt}, && \text{aceleración tangencial.} \end{aligned} \tag{13}$$

Es decir que la aceleración tiene una *componente radial con dirección centrípeta,* presente aunque el módulo de la velocidad sea constante, y una *componente tangencial* de módulo igual a dv/dt, presente solo cuando varía el módulo de la velocidad además de su dirección (con sentido igual u opuesto a la velocidad según el mismo esté creciendo o decreciendo respectivamente). Notemos que el módulo de la aceleración centrípeta está dado por el módulo de la velocidad instantánea y el radio de la circunferencia, v^2/R, *independientemente* del valor de la aceleración tangencial. Por último, observemos que si la velocidad angular es constante, también lo es el módulo de $\mathbf{v}$ (ec. (8)), de modo que si la aceleración angular α es nula, también lo es la aceleración tangencial.

Si el plano de rotación no es el plano xy, el módulo de $\mathbf{r}(t)$ no es necesariamente constante, pero sí lo sera el vector $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_C$, donde $\mathbf{r}_C$ es la posición del centro de la circunferencia. Será entonces $|\mathbf{r}'(t)| = R$, y al ser $\mathbf{r}_C$ independiente del tiempo podemos escribir $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}'/dt$, con lo que $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$. El desarrollo anterior se puede repetir exactamente, sólo reemplazando $\mathbf{r}(t)$ por $\mathbf{r}'(t)$ y $\breve{\mathbf{r}}(t)$ por $\breve{\mathbf{r}}'(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$. Las conclusiones del párrafo anterior permanecen válidas, sólo que referidas al punto $\mathbf{r}_C$.

2.2.2. Velocidad y aceleración angulares. Daremos ahora una definición vectorial de la velocidad y la aceleración angular, que generaliza nuestra definición unidimensional (1). Definiremos el *vector velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ tal que su módulo sea igual a la velocidad angular, su dirección sea normal al plano del movimiento y su sentido sea tal que cumpla la regla de la mano derecha, es decir que si se observa al movimiento desde una posición tal que el vector apunte al observador, la partícula se mueve en sentido antihorario (ver fig.).

Consideremos primero el caso en que el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas y el plano del movimiento es el xy. Poniendo entonces $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} \times \mathbf{a}/v^2 = \mathbf{v} \times \mathbf{a}_r/v^2$ satisfacemos la definición anterior, como es fácil de verificar. La relación entre $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{14}$$

como puede verificarse gráficamente o bien utilizando la fórmula del triple producto vectorial: $v^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} = -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_r)\mathbf{v} = v^2\mathbf{v}$.

El vector aceleración angular es

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{15}$$

Si el movimiento es circular, la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ (indiquémosla con el versor $\breve{\mathbf{n}}$) no cambia con el tiempo, por lo tanto resulta que

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d(\omega\breve{\mathbf{n}})}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\breve{\mathbf{n}}, \tag{16}$$

es decir que el módulo del vector α es igual al módulo de aceleración angular (1), y su dirección es paralela a la de $\boldsymbol{\omega}$.

Posemos encontrar la relación entre $\boldsymbol{\alpha}$ y $\mathbf{a}$ derivando (14):

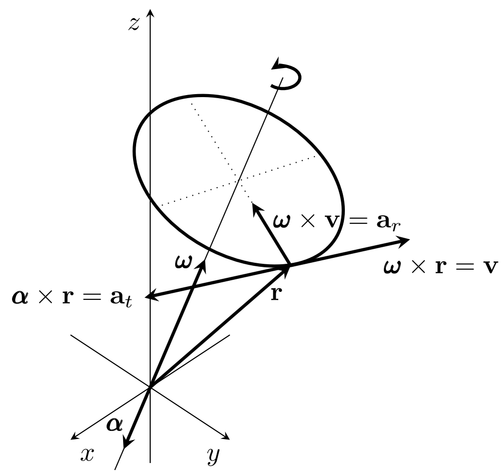
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \tag{17}$$

El segundo término es evidentemente paralelo a $\mathbf{r}$. El primero, por ser $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\omega}$, es en cambio paralelo a $\mathbf{v}$ (tangencial). Resulta entonces que podemos escribir las componentes radial y tangencial de la aceleración como

$$\mathbf{a}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \tag{18a}$$

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}. \tag{18b}$$

Puede verificar el lector que el sentido de $\mathbf{a}_r$ es centrípeto, tal como hallamos en la sec. 2.2.1.



Si el movimiento no es en el plano xy, podemos como antes definir la posición respecto del centro $\mathbf{r}_C$ de la circunferencia, $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_C$. Podemos definir como antes $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} \times \mathbf{a}/v^2$, y este vector define el plano del movimiento. La línea definida por $\boldsymbol{\omega}$ que pasa por el punto $\mathbf{r}_C$ es el *eje de rotación.*

Las relaciones (14), (17) y (18b) son válidas reemplazando $\mathbf{r}$ por $\mathbf{r}'$. En el caso particular en que $\boldsymbol{\omega}$ es paralela a $\mathbf{r}_C$ (es decir que el eje de rotación pasa por el origen de coordenadas) $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ (y análogamente para $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$), de modo que (14), (17) y (18b) pueden utilizarse tal como están escritas[1].

Apéndice A. Nociones previas

Ofrecemos un resumen de los conceptos necesarios para abordar estos apuntes.

A.1. Vectores.

A.1.1. Sistema de coordenadas y base. Para indicar cuantitativamente un vector, es necesario primero elegir un sistema de coordenadas (SC) respecto del cual indicar su módulo y dirección. Un SC *cartesianas* queda definido por un origen y dos (o tres) *ejes coordenados* perpendiculares entre sí. El vector se expresa entonces en términos de sus coordenadas o *componentes* cartesianos, que son los desplazamientos respecto del origen a lo largo de cada uno de los ejes. Frecuentemente se utiliza la notación de par o terna ordenada, $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ para indicar cada una de las componentes cartesianas de $\mathbf{A}$. En estas notas utilizamos otra notación, que parte de observar que la dirección de los ejes coordenados puede expresarse utilizando vectores de módulo unitario o *versores.* Así se pueden utilizar los versores $\breve{\mathbf{i}}$, $\breve{\mathbf{j}}$, $\breve{\mathbf{k}}$ para indicar,

[1]Esto resultará útil al tratar la rotación del cuerpo rígido, pues como veremos, en ese caso todas las partículas del sistema giran en distintos planos pero con un mismo eje de rotación.

respectivamente, la dirección de los ejes x, y y z. Vemos entonces que cualquier vector, de componentes A_x, A_y y A_z, se puede expresar como una suma vectorial

$$\mathbf{A} = A_x\breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{j}} + A_z\breve{\mathbf{k}}. \tag{19}$$

Esta forma de descomponer a $\mathbf{A}$ como suma de escalares que multiplican a los versores es única. Un conjunto de vectores como los $\breve{\mathbf{i}}$, $\breve{\mathbf{j}}$, $\breve{\mathbf{k}}$ que permiten escribir a todos los vectores del espacio de una única manera se denomina *base* del espacio. Existen infinitas bases, pero todas tienen el mismo número de vectores (que es igual a la dimensión del espacio, y corresponde al número de ejes necesarios para definir un vector). La ventaja de esta notación es que hace explícito el SC en el cual se están expresando las coordenadas del vector. Por ejemplo (ver figura)

$$\mathbf{A} = A_x\breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{j}} = A_r\breve{\mathbf{r}} + A_t\breve{\mathbf{t}}. \tag{20}$$

A.1.2. Coordenadas como proyecciones. Cuando los ejes coordenados (y por lo tanto los vectores de la base) son mutuamente ortogonales, las coordenadas se obtienen a partir del módulo $A = |\mathbf{A}|$ mediante

$$A_x = A\cos\theta_i, \qquad A_r = A\cos\theta_r, \tag{21}$$

$$A_y = A\,\mathrm{sen}\,\theta_i = A\cos\theta_j, \qquad A_t = A\,\mathrm{sen}\,\theta_r = A\cos\theta_t, \tag{22}$$

(la identidad $\mathrm{sen}\,\theta_i = \cos\theta_j$ vale porque θ_i y θ_j son complementarios). Esta operación se denomina *proyección ortogonal* del vector sobre el eje. La proyección puede expresarse también mediante el producto escalar, ya que al ser uno el módulo de los versores se tiene por ejemplo $A_x = A|\breve{\mathbf{i}}|\cos\theta_i = \breve{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{A}$. Las componentes cartesianas pueden entonces expresarse convenientemente como proyecciones sobre los respectivos vectores de la base:

$$A_x = \breve{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{A}, \qquad A_r = \breve{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}, \tag{23}$$

$$A_y = \breve{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{A} \qquad A_t = \breve{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{A}. \tag{24}$$

A.1.3. Producto vectorial triple.

A.2. Derivada. Derivada (elemental: regla de la suma y el producto).

A.3. Trayectorias. La trayectoria de una partícula se representa con una función vectorial del tiempo, $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [t_0, t_1]$. Definimos la *velocidad* $\mathbf{v}(t)$ y la *aceleración* $\mathbf{a}(t)$ por

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{25}$$

A.3.1. Movimiento en un plano. La trayectoria tendrá lugar en un plano (no necesariamente coincidente con los planos definidos por los ejes de coordenadas) si existe un vector $\mathbf{n}$ tal que

$$\mathbf{n}\cdot[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)] = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{26}$$

es decir si el desplazamiento es perpendicular a $\mathbf{n}$ en cualquier instante mientras dure el movimiento. Derivando sucesivamente respecto de t, encontramos que entonces

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}(t) = 0, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}(t) = 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{27}$$

es decir que para que el movimiento tenga lugar en un plano, la velocidad y la aceleración deben permanecer siempre en el mismo plano[2]. El vector $\mathbf{n}$ puede elegirse como $\mathbf{n} = \mathbf{v}(t_0) \times \mathbf{a}(t_0)$, aunque naturalmente puede utilizarse cualquier otro vector colineal con éste[3].

Apéndice B. Derivada de un vector de módulo constante

Un resultado sencillo y muy útil en la descripción del movimiento circular es el hecho de que una función vectorial de módulo constante es perpendicular a su derivada. En efecto, si $d|\mathbf{r}|/dt = 0$ también es constante su cuadrado ($d|\mathbf{r}|^2 = dr^2/dt = 2d|\mathbf{r}|/dt = 0$). Luego

$$0 = \frac{dr^2}{dt} = \frac{d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{28}$$

es decir $\mathbf{r} \perp d\mathbf{r}/dt$.

Considerando ahora una función vectorial cualquiera, podemos interpretarla como un producto de funciones, una de las cuales da la dirección del vector y la otra su módulo:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\check{\mathbf{r}}(t), \qquad \check{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}, \tag{29}$$

de manera que la derivada puede expresarse como

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\check{\mathbf{r}}(t) + r(t)\frac{d\check{\mathbf{r}}}{dt}. \tag{30}$$

Por el resultado anterior (ec. (28)) sabemos que el segundo término es perpendicular a $\mathbf{r}$. Hemos entonces separado a la derivada en dos componentes, una paralela a la dirección instantánea de $\mathbf{r}(t)$ y otra perpendicular a la misma. Podemos afirmar entonces que, dado un intervalo temporal $I = [t_1, t_2]$,

1. un vector de módulo constante en I es perpendicular a su derivada, y
2. un vector de dirección constante en I es paralelo a su derivada.

También son válidas las afirmaciones recíprocas,

1. si un vector y su derivada son perpendiculares en I, su módulo es constante, y
2. si un vector y su derivada son paralelos en I, su dirección es constante.

Es importante poder afirmar que vector y derivada son paralelos o perpendiculares *en todo un intervalo* para poder afirmar las conclusiones correspondientes. En efecto, si bien no tiene sentido decir que un vector tiene módulo o dirección constante en un instante de tiempo, las ecuaciones (28) y (30) son válidas instantáneamente (es decir que si la derivada del módulo es nula en un instante, entonces la derivada es perpendicular al vector en ese instante, y lo mismo para la dirección). Podemos recíprocamente decir que si la derivada es perpendicular al vector, entonces la derivada del módulo es nula (o que si la derivada es paralela al vector, la derivada de la dirección es nula). Pero para concluir la constancia del módulo o la dirección en un intervalo, es necesario poder afirmar la condición *en todo el intervalo* (puesto que una derivada instantáneamente nula indica sólo un punto estacionario).

---

[2]Notar que para afirmar (27) es necesario que la igualdad (26) se cumpla en un intervalo de tiempo, y no sólo instantáneamente.

[3]En particular podría evaluarse el producto vectorial en cualquier $\hat{t}$ en el intervalo $[t_0, t_1]$.

Para demostrar las primera de las afirmaciones recíprocas, notemos que si $\mathbf{r}(t) \perp d\mathbf{r}/dt$ en I, entonces

$$r^2(t) = r^2(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{dr^2}{dt}\, dt' = r^2(t_1) + 2\int_{t_1}^{t} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt' = r^2(t_1), \qquad t \in I, \tag{31}$$

es decir que r^2 es constante en I. Para la segunda afirmación, observamos que si $\mathbf{r}(t)$ y $d\mathbf{r}/dr$ son paralelas en $I = [t_1, t_2]$, entonces $\mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}/dt = 0$ $\forall t \in I$ y por lo tanto

$$0 = \mathbf{r}(t) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r(t)\mathbf{r}(t) \times \frac{d\check{\mathbf{r}}}{dt}, \tag{32}$$

que implica $d\check{\mathbf{r}}/dt = 0$ en I, ya que $d\check{\mathbf{r}}/dt$ y $\mathbf{r}(t)$ no son paralelos (son perpendiculares).

Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos, CONICET y Universidad Nacional de La Plata

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata